

2015 年度 論理学 夏季スクーリング 解答例

Last Update: 2015 年 8 月 23 日

---

### 練習問題 2.1

1. *or*

| <i>A</i> | <i>B</i> | <i>A or B</i> |
|----------|----------|---------------|
| <i>t</i> | <i>t</i> | <i>t</i>      |
| <i>t</i> | <i>f</i> | <i>t</i>      |
| <i>f</i> | <i>t</i> | <i>t</i>      |
| <i>f</i> | <i>f</i> | <i>f</i>      |

2. *if A, then B*

| <i>A</i> | <i>B</i> | <i>if A, then B</i> |
|----------|----------|---------------------|
| <i>t</i> | <i>t</i> | <i>t</i>            |
| <i>t</i> | <i>f</i> | <i>f</i>            |
| <i>f</i> | <i>t</i> | <i>t</i>            |
| <i>f</i> | <i>f</i> | <i>t</i>            |

### 練習問題 3.1

1.  $(A \leftrightarrow \top)$

- 1 より  $A$  は論理式
- 2 より  $\top$  は論理式
- 4 より  $(A \leftrightarrow \top)$  は論理式

2.  $((\neg(A \wedge B)) \rightarrow B)$

- 1 より  $A, B$  は論理式
- 4 より  $(A \wedge B)$  は論理式
- 3 より  $(\neg(A \wedge B))$  は論理式
- 4 より  $((\neg(A \wedge B)) \rightarrow B)$  は論理式

3.  $(\top \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \vee A))$

- 1 より  $A, B$  はそれぞれ論理式
- 2 より  $\top$  は論理式
- 4 より  $(A \rightarrow B)$  は論理式
- 4 より  $((A \rightarrow B) \vee A)$  は論理式
- 4 より  $(\top \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \vee A))$  は論理式

### 練習問題 3.2

1.  $(\neg(\neg(\neg\perp))) \implies \neg\neg\neg\perp$

$$2. \quad ((\neg(A \vee B)) \rightarrow (\neg B)) \quad \Longrightarrow \quad \neg(A \vee B) \rightarrow \neg B$$

$$3. \quad (((\neg(A \vee B)) \rightarrow (A \wedge (\neg B))) \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \quad \Longrightarrow \quad (\neg(A \vee B) \rightarrow A \wedge \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \perp)$$

### 練習問題 3.3

$$1. \quad A \leftrightarrow (\neg\neg A)$$

| $A$ | $\neg A$ | $\neg\neg A$ | $A \leftrightarrow (\neg\neg A)$ |
|-----|----------|--------------|----------------------------------|
| $t$ | $f$      | $t$          | $t$                              |
| $f$ | $t$      | $f$          | $t$                              |

$$2. \quad \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \wedge \neg B$ | $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ |
|-----|-----|------------|------------------|----------|----------|------------------------|---|
| $t$ | $t$ | $t$        | $f$              | $f$      | $f$      | $f$                    | $t$   |
| $t$ | $f$ | $t$        | $f$              | $f$      | $t$      | $f$                    | $t$   |
| $f$ | $t$ | $t$        | $f$              | $t$      | $f$      | $f$                    | $t$   |
| $f$ | $f$ | $f$        | $t$              | $t$      | $t$      | $t$                    | $t$   |

$$3. \quad (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \vee A$$

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \rightarrow B$ | $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ | $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \vee A$ |
|-----|-----|----------|-------------------|--|---|
| $t$ | $t$ | $f$      | $t$               | $t$                                    | $t$   |
| $t$ | $f$ | $f$      | $f$               | $t$                                    | $t$   |
| $f$ | $t$ | $t$      | $t$               | $t$                                    | $t$   |
| $f$ | $f$ | $t$      | $t$               | $t$                                    | $t$   |

$$4. \quad (\neg A \rightarrow (A \wedge \neg B)) \rightarrow A$$

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \wedge \neg B$ | $\neg A \rightarrow (A \wedge \neg B)$ | $(\neg A \rightarrow (A \wedge \neg B)) \rightarrow A$ |
|-----|-----|----------|----------|-------------------|--|--|
| $t$ | $t$ | $f$      | $f$      | $f$               | $t$                                    | $t$  |
| $t$ | $f$ | $f$      | $t$      | $t$               | $t$                                    | $t$  |
| $f$ | $t$ | $t$      | $f$      | $f$               | $f$                                    | $t$  |
| $f$ | $f$ | $t$      | $t$      | $f$               | $f$                                    | $t$  |

### 練習問題 3.4

$$1. \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

| $A$ | $B$ | $A \rightarrow B$ | $\neg B$ | $\neg A$ | $\neg B \rightarrow \neg A$ | $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ |
|-----|-----|-------------------|----------|----------|-----------------------------|---|
| $t$ | $t$ | $t$               | $f$      | $f$      | $t$                         | $t$   |
| $t$ | $f$ | $f$               | $t$      | $f$      | $f$                         | $t$   |
| $f$ | $t$ | $t$               | $f$      | $t$      | $t$                         | $t$   |
| $f$ | $f$ | $t$               | $t$      | $t$      | $t$                         | $t$   |

$$2. \quad (A \wedge \neg A) \rightarrow B$$

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \wedge \neg A$ | $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$ |
|-----|-----|----------|-------------------|-----------------------------------|
| $t$ | $t$ | $f$      | $f$               | $t$                               |
| $t$ | $f$ | $f$      | $f$               | $t$                               |
| $f$ | $t$ | $t$      | $f$               | $t$                               |
| $f$ | $f$ | $t$      | $f$               | $t$                               |

3.  $(A \vee B) \rightarrow A$

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $(A \vee B) \rightarrow A$ |
|-----|-----|------------|----------------------------|
| $t$ | $t$ | $t$        | $t$                        |
| $t$ | $f$ | $t$        | $t$                        |
| $f$ | $t$ | $t$        | $f$                        |
| $f$ | $f$ | $f$        | $t$                        |

4.  $B \rightarrow (A \wedge B)$

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $B \rightarrow (A \wedge B)$ |
|-----|-----|--------------|------------------------------|
| $t$ | $t$ | $t$          | $t$                          |
| $t$ | $f$ | $f$          | $t$                          |
| $f$ | $t$ | $f$          | $f$                          |
| $f$ | $f$ | $f$          | $t$                          |

5.  $A \rightarrow (A \vee B)$

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $A \rightarrow (A \vee B)$ |
|-----|-----|------------|----------------------------|
| $t$ | $t$ | $t$        | $t$                        |
| $t$ | $f$ | $t$        | $t$                        |
| $f$ | $t$ | $t$        | $t$                        |
| $f$ | $f$ | $f$        | $t$                        |

6.  $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \vee \neg B$ | $A \vee B$ | $\neg(A \vee B)$ | $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$ |
|-----|-----|----------|----------|----------------------|------------|------------------|---|
| $t$ | $t$ | $f$      | $f$      | $f$                  | $t$        | $f$              | $t$   |
| $t$ | $f$ | $f$      | $t$      | $t$                  | $t$        | $f$              | $f$   |
| $f$ | $t$ | $t$      | $f$      | $t$                  | $t$        | $f$              | $f$   |
| $f$ | $f$ | $t$      | $t$      | $t$                  | $f$        | $t$              | $t$   |

7.  $(A \wedge (A \wedge B)) \leftrightarrow A$

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \wedge (A \wedge B)$ | $(A \wedge (A \wedge B)) \leftrightarrow A$ |
|-----|-----|--------------|-------------------------|---|
| $t$ | $t$ | $t$          | $t$                     | $t$   |
| $t$ | $f$ | $f$          | $f$                     | $f$   |
| $f$ | $t$ | $f$          | $f$                     | $t$   |
| $f$ | $f$ | $f$          | $f$                     | $t$   |

8.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$

| $A$ | $B$ | $C$ | $B \leftrightarrow C$ | $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ | $A \wedge B$ | $(A \wedge (A \vee B)) \leftrightarrow A$ | $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$ |
|-----|-----|-----|-----------------------|-----------------------------------|--------------|---|--|
| $t$ | $t$ | $t$ | $t$                   | $t$                               | $t$          | $t$                                       | $t$  |
| $t$ | $t$ | $f$ | $f$                   | $f$                               | $t$          | $f$                                       | $t$  |
| $t$ | $f$ | $t$ | $t$                   | $t$                               | $f$          | $t$                                       | $t$  |
| $t$ | $f$ | $f$ | $t$                   | $t$                               | $f$          | $t$                                       | $t$  |
| $f$ | $t$ | $t$ | $t$                   | $t$                               | $f$          | $t$                                       | $t$  |
| $f$ | $t$ | $f$ | $f$                   | $t$                               | $f$          | $t$                                       | $t$  |
| $f$ | $f$ | $t$ | $t$                   | $t$                               | $f$          | $t$                                       | $t$  |
| $f$ | $f$ | $f$ | $t$                   | $t$                               | $f$          | $t$                                       | $t$  |

9.  $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

| $A$ | $B$ | $C$ | $B \vee C$ | $A \wedge (B \vee C)$ | $A \wedge B$ | $A \wedge C$ | $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ |
|-----|-----|-----|------------|-----------------------|--------------|--------------|----------------------------------|--|
| $t$ | $t$ | $t$ | $t$        | $t$                   | $t$          | $t$          | $t$                              | $t$  |
| $t$ | $t$ | $f$ | $t$        | $t$                   | $t$          | $f$          | $t$                              | $t$  |
| $t$ | $f$ | $t$ | $t$        | $t$                   | $f$          | $t$          | $t$                              | $t$  |
| $t$ | $f$ | $f$ | $f$        | $f$                   | $f$          | $f$          | $f$                              | $t$  |
| $f$ | $t$ | $t$ | $t$        | $f$                   | $f$          | $f$          | $f$                              | $t$  |
| $f$ | $t$ | $f$ | $t$        | $f$                   | $f$          | $f$          | $f$                              | $t$  |
| $f$ | $f$ | $t$ | $t$        | $f$                   | $f$          | $f$          | $f$                              | $t$  |
| $f$ | $f$ | $f$ | $f$        | $f$                   | $f$          | $f$          | $f$                              | $t$  |

### 練習問題 3.5

1.  $(A \leftrightarrow B)$  と  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$  が同じ真理値を持つことが下の真理表から分かる.

| $A$ | $B$ | $A \leftrightarrow B$ | $A \rightarrow B$ | $B \rightarrow A$ | $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ |
|-----|-----|-----------------------|-------------------|-------------------|--|
| $t$ | $t$ | $t$                   | $t$               | $t$               | $t$  |
| $t$ | $f$ | $f$                   | $f$               | $t$               | $f$  |
| $f$ | $t$ | $f$                   | $t$               | $f$               | $f$  |
| $f$ | $f$ | $t$                   | $t$               | $t$               | $t$  |

2.  $(A \wedge B)$  と  $\neg(\neg A \vee \neg B)$  が同じ真理値を持つことが下の真理表から分かる.

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \vee \neg B$ | $\neg(\neg A \vee \neg B)$ |
|-----|-----|--------------|----------|----------|----------------------|----------------------------|
| $t$ | $t$ | $t$          | $f$      | $f$      | $f$                  | $t$                        |
| $t$ | $f$ | $f$          | $f$      | $t$      | $t$                  | $f$                        |
| $f$ | $t$ | $f$          | $t$      | $f$      | $t$                  | $f$                        |
| $f$ | $f$ | $f$          | $t$      | $t$      | $t$                  | $f$                        |

3.  $(A \vee B)$  と  $\neg(\neg A \wedge \neg B)$  が同じ真理値を持つことが下の真理表から分かる.

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \wedge \neg B$ | $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ |
|-----|-----|------------|----------|----------|------------------------|------------------------------|
| $t$ | $t$ | $t$        | $f$      | $f$      | $f$                    | $t$                          |
| $t$ | $f$ | $t$        | $f$      | $t$      | $f$                    | $t$                          |
| $f$ | $t$ | $t$        | $t$      | $f$      | $f$                    | $t$                          |
| $f$ | $f$ | $f$        | $t$      | $t$      | $t$                    | $f$                          |

### 練習問題 3.6

1. 前提  $A \wedge (B \wedge C)$  から  $(A \wedge B) \wedge C$  に至る証明.

$$\frac{\frac{A \wedge (B \wedge C)}{A} \wedge\text{-E} \quad \frac{\frac{A \wedge (B \wedge C)}{B \wedge C} \wedge\text{-E} \quad \frac{A \wedge (B \wedge C)}{B} \wedge\text{-E}}{B} \wedge\text{-I} \quad \frac{\frac{A \wedge (B \wedge C)}{B \wedge C} \wedge\text{-E} \quad \frac{A \wedge (B \wedge C)}{C} \wedge\text{-E}}{C} \wedge\text{-I}}{A \wedge B} \wedge\text{-I} \quad \frac{A \wedge B}{(A \wedge B) \wedge C} \wedge\text{-I}$$

## 練習問題 3.7

1.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$

$$\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge\text{-E} \quad \frac{\frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge\text{-E} \quad [A \rightarrow (B \rightarrow C)]^2}{B \rightarrow C} \rightarrow\text{-E}}{C} \rightarrow\text{-I,1} \quad \frac{A \wedge B \rightarrow C}{(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)} \rightarrow\text{-I,2}$$

2.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \wedge A \rightarrow (B \rightarrow C)$

$$\frac{\frac{[(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \wedge A]^1}{A} \wedge\text{-E} \quad \frac{[(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \wedge A]^1}{A \rightarrow (B \rightarrow C)} \wedge\text{-E}}{B \rightarrow C} \rightarrow\text{-E} \quad \frac{B \rightarrow C}{(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \wedge A \rightarrow (B \rightarrow C)} \rightarrow\text{-I,1}$$

3.  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$$\frac{\frac{[A]^1}{B} [A \rightarrow B]^3 \rightarrow\text{-E} \quad [B \rightarrow C]^2}{C} \rightarrow\text{-E} \quad \frac{C}{A \rightarrow C} \rightarrow\text{-I,1} \quad \frac{A \rightarrow C}{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)} \rightarrow\text{-I,2} \quad \frac{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)}{(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))} \rightarrow\text{-I,3}$$

## 練習問題 3.8

1.  $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$

$$\frac{\frac{[A]^2}{\perp} [\neg A]^1 \neg\text{-E}}{\neg\neg A} \neg\text{-I,1} \quad \frac{[\neg\neg A]^3}{\perp} \neg\text{-E} \quad \frac{\perp}{\neg A} \neg\text{-I,2} \quad \frac{\neg A}{\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A} \rightarrow\text{-I,3}$$

2.  $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg(A \wedge B)$

$$\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge\text{-E} \quad \frac{[(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow \neg C)]^2}{A \rightarrow C} \wedge\text{-E} \quad \frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge\text{-E} \quad \frac{[(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow \neg C)]^2}{B \rightarrow \neg C} \wedge\text{-E}}{C} \wedge\text{-E} \quad \frac{C}{\neg C} \neg\text{-E} \quad \frac{\perp}{\neg(A \wedge B)} \neg\text{-I,1} \quad \frac{\neg(A \wedge B)}{(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg(A \wedge B)} \rightarrow\text{-I,2}$$

## 練習問題 3.9

$$1. (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

$$\frac{\frac{[\neg A \vee \neg B]^3 \quad \frac{[\neg A]^1 \quad \frac{[A \wedge B]^2}{A} \wedge-E}{\perp} \neg-E \quad \frac{[\neg B]^1 \quad \frac{[A \wedge B]^2}{B} \wedge-E}{\perp} \neg-E}{\perp} \vee-E,1}{\frac{\perp}{\neg(A \wedge B)} \neg-I,2} \rightarrow-I,3$$

$$2. (A \vee B) \vee C \rightarrow B \vee (C \vee A)$$

$$\frac{[(A \vee B) \vee C]^1 \quad \frac{\frac{[A]^3}{C \vee A} \vee-I}{B \vee (C \vee A)} \vee-I \quad \frac{[B]^3}{B \vee (C \vee A)} \vee-I}{\frac{B \vee (C \vee A)}{B \vee (C \vee A)} \vee-E,3} \vee-E,2}{\frac{B \vee (C \vee A)}{(A \vee B) \vee C \rightarrow B \vee (C \vee A)} \rightarrow-I,1}$$

$$3. (A \wedge B) \vee C \rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$\frac{[(A \wedge B) \vee C]^1 \quad \frac{\frac{[A \wedge B]^2}{A} \wedge-E \quad \frac{[A \wedge B]^2}{B} \wedge-E}{\frac{A \vee C}{A \vee C} \vee-I \quad \frac{B \vee C}{B \vee C} \vee-I} \wedge-I \quad \frac{[C]^2}{A \vee C} \vee-I \quad \frac{[C]^2}{B \vee C} \vee-I}{\frac{(A \vee C) \wedge (B \vee C)}{(A \vee C) \wedge (B \vee C)} \wedge-I} \vee-E,2}{\frac{(A \vee C) \wedge (B \vee C)}{(A \wedge B) \vee C \rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)} \rightarrow-I,1}$$

$$4. (A \vee C) \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee C$$

$$\frac{\frac{[(A \vee C) \wedge (B \vee C)]^1}{A \vee C} \wedge-E \quad \frac{\frac{[(A \vee C) \wedge (B \vee C)]^1}{B \vee C} \wedge-E \quad \frac{[A]^2 \quad [B]^3}{A \wedge B} \wedge-I}{\frac{(A \wedge B) \vee C}{(A \wedge B) \vee C} \vee-I} \vee-E,3 \quad \frac{[C]^3}{(A \wedge B) \vee C} \vee-I}{\frac{(A \wedge B) \vee C}{(A \wedge B) \vee C} \vee-E,2} \rightarrow-I,1$$

## 練習問題 3.10

$$1. ((A \vee \neg B) \wedge B) \rightarrow A$$

$$\frac{\frac{[(A \vee \neg B) \wedge B]^2}{A \vee \neg B} \wedge-E \quad \frac{[\neg B]^1 \quad \frac{[(A \vee \neg B) \wedge B]^2}{B} \wedge-E}{\frac{\perp}{A} \perp-E} \neg-E}{\frac{A}{(A \vee \neg B) \wedge B} \vee-E,1} \rightarrow-I,2$$

## 練習問題 3.11

1.  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

$$\frac{\frac{\frac{[\neg B \rightarrow \neg A]^3 \quad [\neg B]^1}{\neg A} \rightarrow -E \quad [A]^2}{\neg \neg E}}{\frac{\frac{\perp}{\neg \neg B} \neg -I,1}{\neg \neg E} \quad \frac{B}{\rightarrow -I,2}}{A \rightarrow B} \rightarrow -I,2}}{(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)} \rightarrow -I,3$$

2.  $(\neg A \rightarrow (A \wedge \neg B)) \rightarrow A$

$$\frac{\frac{[\neg A]^1 \quad [\neg A \rightarrow (A \wedge \neg B)]^2}{\frac{A \wedge \neg B}{A} \wedge -E} \rightarrow -E \quad [\neg A]_1}{\frac{\frac{\perp}{\neg \neg A} \neg -I,1}{\neg \neg E} \quad A}{(\neg A \rightarrow (A \wedge \neg B)) \rightarrow A} \rightarrow -I,2} \neg \neg E$$

### 練習問題 3.12

1.  $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow \neg A$

$$\frac{[A]^1 \quad \frac{\frac{[(A \rightarrow B) \wedge \neg B]^2}{A \rightarrow B} \wedge -E}{B} \rightarrow -E \quad \frac{[(A \rightarrow B) \wedge \neg B]^2}{\neg B} \wedge -E}{\frac{\frac{\perp}{\neg A} \neg -I,1}{(A \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow \neg A} \rightarrow -I,2} \rightarrow -E$$

2.  $A \rightarrow (B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B))$

$$\frac{[B]^2 \quad \frac{[A]^3 \quad [A \rightarrow \neg B]^1}{\neg B} \rightarrow -E}{\frac{\frac{\perp}{\neg(A \rightarrow \neg B)} \neg -I,1}{B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)} \rightarrow -I,2} \rightarrow -I,3$$

3.  $A \wedge B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$

$$\frac{\frac{[A \wedge B]^2}{B} \wedge -E \quad \frac{[A \wedge B]^2}{A} \wedge -E \quad [A \rightarrow \neg B]^1}{\frac{\perp}{\neg(A \rightarrow \neg B)} \neg -E} \rightarrow -E$$

$$\frac{\frac{\perp}{\neg(A \rightarrow \neg B)} \neg -I,1}{A \wedge B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)} \rightarrow -I,2$$

4.  $(A \vee B) \wedge C \rightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

$$\frac{\frac{[(A \vee B) \wedge C]^1}{A \vee B} \wedge\text{-E} \quad \frac{\frac{[A]^2 \quad \frac{[(A \vee B) \wedge C]^1}{C} \wedge\text{-E}}{A \wedge C} \wedge\text{-I} \quad \frac{[B]^2 \quad \frac{[(A \vee B) \wedge C]^1}{C} \wedge\text{-E}}{B \wedge C} \wedge\text{-I}}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)} \vee\text{-I}}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)} \vee\text{-E,2}}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)} \rightarrow\text{-I,1}$$

5.  $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \vee B) \wedge C$

$$\frac{[(A \wedge C) \vee (B \wedge C)]^1 \quad \frac{\frac{[A \wedge C]^2}{A} \wedge\text{-E} \quad \frac{[A \wedge C]^2}{A \vee B} \vee\text{-I} \quad \frac{[A \wedge C]^2}{C} \wedge\text{-E}}{(A \vee B) \wedge C} \wedge\text{-I} \quad \frac{\frac{[B \wedge C]^2}{B} \wedge\text{-E} \quad \frac{[B \wedge C]^2}{A \vee B} \vee\text{-I} \quad \frac{[B \wedge C]^2}{C} \wedge\text{-E}}{(A \vee B) \wedge C} \wedge\text{-I}}{(A \vee B) \wedge C} \vee\text{-E,2}}{(A \vee B) \wedge C} \rightarrow\text{-I,1}$$

6.  $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

$$\frac{\frac{[\neg(A \wedge B)]^4 \quad \frac{[A]^1 \quad [B]^2}{A \wedge B} \wedge\text{-I}}{\perp} \neg\text{-E} \quad \frac{\perp}{\neg A} \neg\text{-I,1}}{\neg A \vee \neg B} \vee\text{-I} \quad \frac{[\neg(\neg A \vee \neg B)]^3}{\perp} \neg\text{-E} \quad \frac{\perp}{\neg B} \neg\text{-I,2}}{\neg A \vee \neg B} \vee\text{-I} \quad \frac{[\neg(\neg A \vee \neg B)]^3}{\perp} \neg\text{-E} \quad \frac{\perp}{\neg\neg(\neg A \vee \neg B)} \neg\text{-I,3}}{\neg A \vee \neg B} \neg\text{-E} \quad \frac{\neg A \vee \neg B}{\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)} \rightarrow\text{-I,4}$$

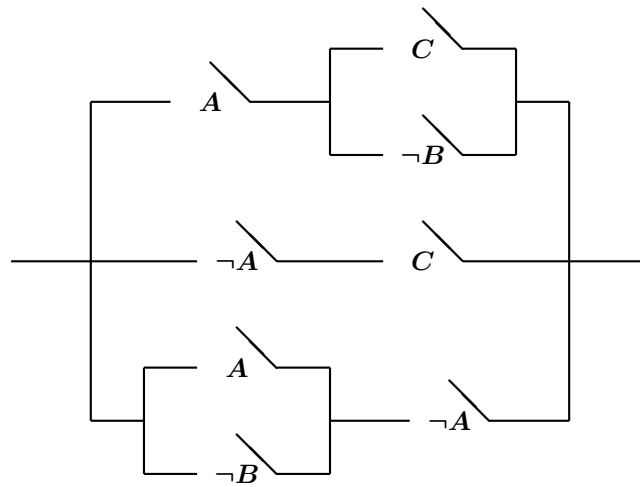
7.  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$

$$\frac{\frac{[A]^1 \quad [A \rightarrow B]^3}{B} \rightarrow\text{-E} \quad \frac{B}{\neg A \vee B} \vee\text{-I} \quad \frac{[\neg(\neg A \vee B)]^2}{\perp} \neg\text{-E}}{\neg A \vee B} \vee\text{-I} \quad \frac{\perp}{\neg A} \neg\text{-I,1}}{\neg A \vee B} \vee\text{-I} \quad \frac{[\neg(\neg A \vee B)]^2}{\perp} \neg\text{-E} \quad \frac{\perp}{\neg\neg(\neg A \vee B)} \neg\text{-I,2}}{\neg A \vee B} \neg\text{-E} \quad \frac{\neg A \vee B}{(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)} \rightarrow\text{-I,3}$$

### 練習問題 3.13

1. まず、次の回路を論理式で表わせ。

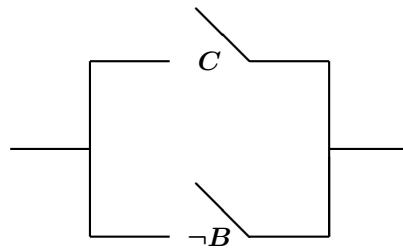




解答例  $(A \wedge (C \vee \neg B)) \vee (\neg A \wedge C) \vee ((A \vee \neg B) \wedge \neg A)$

2. 次に、この回路と同じ役割を果たす最も単純な回路を与えよ。(そして、実際に、その回路がもとのものと同値であることを論理的に証明せよ。)

解答例



また、 $(A \wedge (C \vee \neg B)) \vee (\neg A \wedge C) \vee ((A \vee \neg B) \wedge \neg A) \leftrightarrow (C \vee \neg B)$  を示せば良い。(ただし証明は省略)。

練習問題 3.14 次の前提より、定理を導き出せ。

1. 今日晴れているならば、僕はテニスをする。

晴れる  $\rightarrow$  テニスをする

2. 僕が勉強するならば、僕はテニスをしない。

勉強する  $\rightarrow$   $\neg$ テニスをする

3. 僕の気分がよければ、その日は必ず晴れている。

気分がよい  $\rightarrow$  晴れる

4. 僕の気分が悪ければ、僕は勉強しない。

$\neg$ 気分がよい  $\rightarrow$   $\neg$ 勉強する

(定理) 僕は、今日勉強しない。

$\neg$ 勉強する

解答例

“勉強する”を  $B$ ，“晴れる”を  $H$ ，“テニスをやる”を  $T$ ，“気分がよい”を  $K$  とする。

$$\frac{\frac{\frac{[K]^3 \quad K \rightarrow H}{H} \rightarrow \neg E \quad \frac{\frac{[H]^1 \quad H \rightarrow T}{T} \rightarrow \neg E \quad \frac{[B]^2 \quad B \rightarrow \neg T}{\neg T} \rightarrow \neg E}{\perp} \neg I,1}{\neg H} \neg E \quad \frac{\perp}{\neg K} \neg I,3}{[B]^2} \neg E}{\perp} \neg I,2}{\neg B} \neg E$$

練習問題 3.15 次の前提より、定理を導き出せ。

1. 神が存在し、私が神を信じるならば、私は救われる。

神  $\wedge$  信  $\rightarrow$  救

2. 神が存在しなければ、悪魔が存在する。

$\neg$ 神  $\rightarrow$  悪

3. 私が救われるならば、神は存在する。

救  $\rightarrow$  神

4. 悪魔が存在するならば、私は神を信じる。

悪  $\rightarrow$  信

(定理 1) 私が救われることなく、しかも私が神を信じるならば、悪魔が存在する。

$\neg$ 救  $\wedge$  信  $\rightarrow$  悪

解答例

$$\frac{\frac{\frac{[\neg \text{救} \wedge \text{信}]^2}{\text{信}} \wedge \neg E \quad \frac{[\text{神}]^1}{\text{神} \wedge \text{信}} \wedge I}{\text{救}} \rightarrow \neg E \quad \frac{[\neg \text{救} \wedge \text{信}]^2}{\neg \text{救}} \wedge \neg E}{\perp} \neg I,1}{\neg \text{神}} \neg E}{\text{悪}} \rightarrow \neg I,2}{\neg \text{救} \wedge \text{信} \rightarrow \text{悪}} \rightarrow \neg E$$

(定理 2) 神が存在するか、私が神を信じると悪魔が存在することが同値であるかである。

神  $\vee$  (信  $\leftrightarrow$  悪)

解答例

$$\begin{array}{c}
 \frac{[救]^1 \quad 救 \rightarrow 神}{神} \rightarrow -E \\
 \frac{[\neg(神 \vee (信 \leftrightarrow 悪))]^3 \quad 神 \vee (信 \leftrightarrow 悪)}{神 \vee (信 \leftrightarrow 悪)} \vee -I \\
 \frac{\perp}{\neg 救} \neg -I,1 \quad \frac{[信]^2}{\neg 救 \wedge 信} \wedge -I \\
 \frac{\neg 救 \wedge 信 \rightarrow 悪 \text{ [定理 1]}}{\neg 救 \wedge 信} \rightarrow -E \\
 \frac{悪}{信 \rightarrow 悪} \rightarrow -I,2 \quad \frac{悪 \rightarrow 信}{(信 \rightarrow 悪) \wedge (悪 \rightarrow 信)} \wedge -I \\
 \frac{(信 \rightarrow 悪) \wedge (悪 \rightarrow 信)}{神 \vee (信 \leftrightarrow 悪)} \vee -I \\
 \frac{[\neg(神 \vee (信 \leftrightarrow 悪))]^3}{\perp} \neg -E,1 \quad \frac{\perp}{\neg \neg(神 \vee (信 \leftrightarrow 悪))} \neg -I,3 \\
 \frac{\neg \neg(神 \vee (信 \leftrightarrow 悪))}{神 \vee (信 \leftrightarrow 悪)} \neg -E
 \end{array}$$

練習問題 3.16 次の前提より，定理を導き出せ．

- 2本足であるならば，鳥であるか，人間である．

$$2 \text{ 本足} \rightarrow 鳥 \vee 人間$$

- 鳥は空を飛べる．

$$鳥 \rightarrow 飛$$

(定理) 2本足で空を飛べないならば，人間である．

$$2 \text{ 本足} \wedge \neg 飛 \rightarrow 人間$$

解答例

$$\begin{array}{c}
 \frac{[2 \text{ 本足} \wedge \neg 飛]^2}{2 \text{ 本足}} \wedge -E \quad \frac{[鳥]^1 \quad 鳥 \rightarrow 飛}{飛} \rightarrow -E \quad \frac{[2 \text{ 本足} \wedge \neg 飛]^2}{\neg 飛} \wedge -E \\
 \frac{2 \text{ 本足} \rightarrow 鳥 \vee 人間}{鳥 \vee 人間} \rightarrow -E \quad \frac{\perp}{人間} \perp -E \\
 \frac{人間}{2 \text{ 本足} \wedge \neg 飛 \rightarrow 人間} \rightarrow -I,2 \quad \frac{[人間]^1}{\perp} \vee -E,1
 \end{array}$$

練習問題 3.17

(与式)

↓

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A]}{A \vee \neg A} \quad \frac{[\neg A]}{\neg(A \vee \neg A)} \quad \frac{[A]}{A \vee \neg A} \quad \frac{[\neg A]}{\neg(A \vee \neg A)} \\
 \frac{\perp}{\neg A} \quad \frac{\perp}{\neg \neg A} \quad \frac{\perp}{\neg A} \quad \frac{\perp}{\neg \neg A} \\
 \frac{\neg A \wedge \neg \neg A}{\neg A} \quad \frac{\neg A \wedge \neg \neg A}{\neg \neg A} \\
 \frac{\perp}{\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \perp}
 \end{array}$$

↓

$$\frac{\frac{[A]}{A \vee \neg A} \quad \frac{[\neg(A \vee \neg A)]}{\perp}}{\neg A} \quad \frac{\frac{[\neg A]}{A \vee \neg A} \quad \frac{[\neg(A \vee \neg A)]}{\perp}}{\neg \neg A}}{\frac{\perp}{\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \perp}}$$

↓

$$\frac{\frac{[A]}{A \vee \neg A} \quad \frac{[\neg(A \vee \neg A)]}{\perp}}{\frac{\perp}{\neg A}} \quad \frac{[\neg(A \vee \neg A)]}{\perp}}{\frac{\perp}{\neg(A \vee \neg A)}} \quad \frac{\perp}{\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \perp}$$