2014年度 論理学 夏季スクーリング

慶應義塾大学文学部
岡田 光弘
email: mitsu@abelard.flet.keio.ac.jp

目 次

第1章　はじめに

本稿は著者が慶應義塾大学で行なってきた講義録をまとめたものである．一般教育科目としての「論理学」のテキストとして利用されることを意図している．内容的には，標準的な命題論理・述語論理の構文論と意味論に加えて，多値論理や直観論理等の非標準的な論理を系統的に扱っているのが一つの特徴と言える．

『不思議の国のアリス』の著者ルイス・キャロルは，又の名をチャールズ・L・ドジソンという，19 世紀後半のイギリスの論理学者でもあった．彼は著書『記号論理学』というテキストの冒頭で，新たに論理学を学ぼうとする読者に対して，いくつかの従うべき規則を提案している．このルイス・キャロルの規則は，今日でも有益なものだと思われるので，ここで簡単に彼の規則を紹介し，さらに少し解説を加えておこう．

[**規則 1**] Begin at the beginning. つまり「始めから始めよ」である．

時々，小説を読むのに，どんな話の結末かを確かめてから，読みはじめる，というような人を見かける．「ああ，ハッピーエンドなんだ」とか,「こいつが真犯人なのか」とか前もって確認してから，安心して小説を読み始める，というタイプの人がいる．小説の場合はそれも許されるかもしれないが，科学的な本，特に論理学の本では，そのような読み方は不可能である．一段一段，概念を積み上げていくのが論理的議論の特徴であるので，途中をスキップして読むと意味が理解できなくなる．だから，論理学の本をはじめから読む前に，中身をチラッと見てみようなどと企んで途中のページを開いてみても，結局「何が書いてあるのだか分からない．どうにもこの本は難しすぎて自分の手に負えそうもない.」と悲観的になるのが常である．

[**規則 2**] 「完全にその章が理解できるまで，次の章に読み進むな.」

どんな大天才でも，途中で分からなくなったまま先に進んでは，論理学や数学等の本は理解することはできないものである．それが論理的議論の特徴である．大天才でもそうなのだから，あなたがもし単なる秀才程度なら，なおさらそうなのである．だが逆に，各ステップを一段一段理解していけば，最初には夢にも思っていなかったような高い見晴しのよい地点まで普通の人間ならだれでも到達できるのも，また論理学の特徴なのだ，ということを忘れないでおいてほしい．

[**規則 3**] 分からない部分に出くわしたら，そこをもう一度読んでみること．それでも分からなかったら，もう一度読み直してみること．もし，三度読んでも分からなかったら，あなたの頭が疲れている可能性が強いから，そこで読むのをやめて，その日はほかのことをした方がよい．そして，ゆっくり休んでから次の日に読み直してみると,「なんだ，簡単なことじゃないか」ということになる可能性が強いのである．

次の規則は私が最も気に入っている規則である．

[**規則 4**] できれば，論理学が得意そうな友達をみつけて，いっしょに読むとよい．そして，難しいところを話し合いながら読み進めるとよい．話すことは，問題解決の最大の方策である．

ところで，以上のドジソンの 4 つの規則にもう一つ私が加えるとすると，それは次のような規則であろう．

[**規則 5**] 体を使って練習を充分行なうこと．即ち，頭だけを使って論理学を理解しようなどとは思わず，練習問題を実際に紙に書いて解いてみること，である．論理学のような知的な学問分野の習得は，純粋に頭だけを使ってなされるのであり，体を動かす必要はない，等と誤って考えられがちだが，実は論理学のような知的学問の習得は，手を動かして練習問題をくり返し解いていくことにより体で習得していく方が近道なのである．それは，運動選手の練習や，楽器の演奏家の練習や，語学学習者の練習がそうであるのと

まったく同様なのである．

以上の 5 つの規則を守って読み進めて頂きたい．本書をとおして論理学の持つ知的な楽しさの一端でも読者に伝えることができれば，著者にとってこの上ない喜びである．

第2章　論理学とは何か

論理学は，思考の道筋を「真理 (Truth)」という概念を用いて説明する学問である．そこでは，真理と真理との関係が問題とされる．この点で論理学は，他の学問とは異なる．この違いは，研究対象の違いである．例えば，物理学は物理についての真理を，数学は数についての真理を探究する．これに対して，論理学は真理そのものを研究対象としている．つまり,「$\cdots$ が真であるならば 〜 は真である」というような真理関係とはいかなるものかを探究しているのである．

論理学の探究の一つの方法として**真理表 (truth table)** が用いられる [1]．論理学では，この方法によって “*and*” “*not*” の真理関係が次のように理解される．

A	$not\ A$
真	偽
偽	真

A	B	$A\ and\ B$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	偽
偽	偽	偽

この表で,「A が真であるならば $not\ A$ は偽である」「A と B が共に真であるならば，$A\ and\ B$ は真である」等の真理関係が表現されている．

論理学では，and，not，or，$if \ldots, then \ldots$ などの真理関係を問題とする．これらの語の意味は，真理表によって与えられる．逆の言い方をすれば，真理表を与えることによって，我々は，and，not，or，$if \ldots, then \ldots$ の使い方が理解できるのである．

我々がここで定義したいのは，**記号論理学**である．これは，記号を用いて真偽を表現するものである．そこで用いられる真理関係は，我々の通常の英語とは独立に与えられるのが普通である．これは我々が，今，人工言語を定義しようとしているからである．それゆえ，混乱を防ぐため，次のような人工言語特有の記号を用いることにする．

$$\wedge\ ,\ \neg\ ,\ \vee\ ,\ \rightarrow$$

これらの記号は，左からそれぞれ and，not，or，$if \ldots then$ と呼ばれ，真理表が与えられるまでは意味がない．“$\wedge$” と “$\neg$” は，我々が上で真理表によって意味を与えた and と not にあたる．(その他の記号については，まだその真理表が与えられていない．しかし，ここでは，すでにその意味があたえられているものとし，説明を続ける．) 記号論理学は，上にあげたような記号の他に，$A, B, \ldots$ のような記号を用いる．ここで A, B は真偽がいえるような文である．そして，複雑な文がこれらの記号によって表現され，その真偽が考えられるのである．

例えば，次のような哲学科の必修科目の表があるとする．

[1] これは，ウィトゲンシュタインによって導入された．

基礎科目	選択科目 I	選択科目 II
論理学入門	現代論理学	特殊講義 V
哲学史 I	科学の哲学	哲学研究会
哲学史 II	歴史の哲学	

ここで，履修方法として「基礎科目，選択科目 I，選択科目 II のそれぞれから少なくとも一つの授業を履修しなければならない」とする．するとこの履修規則は，次のように表現される．

1. (論理学入門が必要である $\vee$ 哲学史 I が必要である $\vee$ 哲学史 II が必要である)
$\wedge$(現代論理学が必要である $\vee$ 科学の哲学が必要である $\vee$ 歴史の哲学が必要である)
$\wedge$(特殊講義 V が必要である $\vee$ 哲学研究会が必要である)

論理学の興味は，真理にある．では，1 の表現の真理はいかなるものであるのか．論理学では，この種の表現の真理は**偶然的真理**といわれる．と言うのは，この履修規則は，ある特定の大学 (慶応) において，そしてある特定の年度について真とされているからである．同じような例として，“今日晴れている $\rightarrow$ テニスをする” がある．というのは，ある人は，晴れていたらテニスをするかもしれないが，他の人はピンポンをするかもしれないからである．では，偶然的ではない真理，すなわち**必然的真理**とはいかなるものであろうか．それは，次のような表現についての真理である．

2. ((今日晴れている $\rightarrow$ テニスをする) $\wedge$ ($\neg$(テニスをする))) $\rightarrow$ ($\neg$(今日晴れている))

この表現の一部 “今日晴れている $\rightarrow$ テニスをする” は，確かに偶然的真理ではあるが，この表現全体としては，常に真である．この様な真理を**論理的真**と言う．また，次の表現は，天文学的には真かもしれないが，論理的必然性を持たない．よって，論理的真ではない．

3. UFO が存在する

しかし，次の表現は論理的真である．

4. UFO が存在する $\vee$ ($\neg$(UFO が存在する))

ここで留意すべき点は，2，4 が，“今日晴れている” “テニスをする” “UFO が存在する” 等の文の種類のいかんによらず真と言える点である．すなわち，2，4 は，それぞれ以下の 5，6 のような形式を持ち, その形式のみで A, B の具体的な内容にかかわらず常に真といえる．このような形式的な真理を論理的真というのである．

5. $(A \rightarrow B) \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$

6. $A \vee (\neg A)$

このように記号論理学は，論理的真を探求するというその性格上，文の形式のみを問題とすることから，具体的な文を用いず，それを表わすものとして A, B 等の記号を用いる．記号論理学では，人工的に $A, B, \ldots, \vee, \neg, \ldots$ 等の語とそれらについての文法を導入し，そしてその意味を人工的に与える．というのは，人工言語は日常言語に比べて曖昧さがなく真偽がいえるからである．

次章では，人工言語を，言語，意味，文法の順に導入する．その上で常に真となる文 (論理的に真な文) とは，いかなる形式の文であるかを探求しようと思う．

練習問題 2.1　1. “*or*” の真理表を，我々の日常的表現 (英語) に照らし合わせて作れ．

2. “$If\ A, then\ B$” の真理表を同様に作れ．

第3章　命題論理

3.1　命題論理の形式言語

命題論理の形式言語のボキャブラリーは，次のものからなる．

定義 3.1 (命題論理の形式言語のボキャブラリー)

$$
\begin{array}{lcl}
\textbf{論理記号} & : & \land, \lor, \neg, \to, \leftrightarrow \\
\textbf{命題変項} & : & P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, \ldots \\
\textbf{命題定項} & : & \top, \bot
\end{array}
$$

ここで，命題変項及び命題定項は単文を表し，論理記号は文と文をつなぐ接続詞の役割を果たすことが後に示される．言語は，意味とは独立に，ただ記号のみが与えられるという形で定義される．つまり，言語は，その記号の意味が与えられるまでは無意味なものとして取り扱われる．そこで，論理記号，命題定項等の意味は後で与えることにして，ひとまず記号の意味を考えず，次のように読むことにする[1]．

$$
\begin{array}{cccc}
\land & \cdots & and & \text{かつ} \\
\lor & \cdots & or & \text{または} \\
\neg & \cdots & not & \text{非} \\
\to & \cdots & if \ldots then \ldots & \text{ならば} \\
\leftrightarrow & \cdots & if\ and\ only\ if & \text{同値} \\
\top & \cdots & true & \text{真} \\
\bot & \cdots & false & \text{偽}
\end{array}
$$

次に命題論理における**論理式** (又はしばしば**命題**とも呼ばれる) を定義する．ここで論理式とは，我々の自然言語の文にあたるものである．自然言語においてどんな言語表現が正しい文であるかを示す規則は**文法**と呼ばれている．日本語や英語の文法に書かれているのは，正しい文を作る規則の集まりである．我々の命題論理言語では，全ての文法は下の定義に示されるようにほんの数行で書き下されてしまう．

定義 3.2 (命題論理における論理式 (文法))　1. 命題変項は論理式である．

2. 命題定項は論理式である．
3. もし，A が論理式であるならば，$(\neg A)$ も論理式である．
4. もし，A, B が共に論理式であるならば，$(A \land B)$，$(A \lor B)$，$(A \to B)$，$(A \leftrightarrow B)$ は，それぞれ論理式である．
5. 以上で論理式と分かるものだけを論理式とする．

---

[1] というものの，我々が記号を無意味なものとして取り扱うことができるのは，記号 “$A, B, \ldots, \land, \neg, \lor, \to$” に関する何等かの意味をあらかじめ知っており，その上で，その「意味」をキャンセルしていることに他ならない．そうでなければ,「無意味」が何を意味しているかも理解できないはずである．

では，論理式とそうではないものを区別してみよう．まず，$(((P \land Q) \to \top) \lor (\neg R))$ は論理式である．それは，次のことより明らかである．

$$\begin{array}{lll} 1 & \text{より} & P, Q, R \text{ は論理式} \\ 4 & \text{より} & (P \land Q) \text{ は論理式} \\ 2 & \text{より} & \top \text{は論理式} \\ 4 & \text{より} & ((P \land Q) \to \top) \text{ は論理式} \\ 3 & \text{より} & (\neg R) \text{ は論理式} \\ 4 & \text{より} & (((P \land Q) \to \top) \lor (\neg R)) \text{ は論理式} \end{array}$$

しかし，$((\neg \leftrightarrow R) \lor \bot)$ は論理式ではない．

なお括弧は，すべてつけると論理式が繁雑になるので，混乱を防ぐために最小限用いる．括弧は，論理記号と命題記号との結び付きの強さに応じて省略する．又一般に，一番外側の括弧は省略する．命題記号との結びつきは $\neg$ がもっとも強く，次に $\land$ 又は $\lor$，もっとも弱いのが $\to$ 又は $\leftrightarrow$ である．

例えば，次の論理式 $\neg P \land Q$ は，$\neg(P \land Q)$ ではなく $(\neg P) \land Q$ を意味する．と言うのは，$\neg$ が $\land$ よりも命題 P に対する結び付きが強いからである．また $\neg P \to R \land Q$ は，$\neg(P \to (R \land Q))$ や $\neg(P \to R) \land Q$ でなく，$(\neg P) \to (R \land Q)$ を意味する．というのは，$\neg$，$\land$ が $\to$ よりも結合力が強いからである．他方，$(P \lor R) \land Q$ は，$P \lor R \land Q$ とは省略できない．これは，$\lor$ と $\land$ の結合力が等しいため，$P \lor (R \land Q)$ との区別が付かないからである．

括弧の省略規則

1. 一番外側の括弧は原則として常に省略する．
2. 次の結び付きの大小関係 $<$ に従って結び付きの関係が明かな括弧は省略する．

$$\begin{array}{ccccc} \to & & \land & & \\ & < & & < & \neg \\ \leftrightarrow & & \lor & & \end{array}$$

では，$((P \land Q) \to \top) \lor (\neg R)$ の括弧を実際に外してみよう．まず $(P \land Q) \to \top$ が $P \land Q \to \top$ に省略され，$(P \land Q \to \top) \lor (\neg R)$ となる．これは，$\land$ の方が $\to$ よりも Q に対する結び付きが強いからである．そして，$(P \land Q \to \top) \lor \neg R$ となる．しかし，最後の括弧を取り除いて $P \land Q \to \top \lor \neg R$ としてしまうと，$\lor$ が $\to$ よりも強い結合力をもつから，この論理式は $(P \land Q) \to (\top \lor \neg R)$ を意味することになってしまう．

3.2 命題論理の意味論

命題論理の対象である論理式は，**真**又は**偽**という真理値を持つ．上で与えられた命題論理の言語には，この真理値をもとにした次のような意味が与えられる [2]．

定義 3.3 (論理式の真理値)

1. 命題定項 $\top$ は，真 (*true*) いう真理値を常に持つ．すなわち，論理式 $\top$ の意味は，真 (*true*) である．
2. 命題定項 $\bot$ は，偽 (*false*) という真理値を常に持つ．すなわち，論理式 $\bot$ の意味は，偽 (*false*) である．
3. 命題変項 P は，真 (*true*) 及び偽 (*false*) を値として取り得る変項である．
4. $A \wedge B$ の形の論理式が真 (*true*) であるのは，A が真 (*true*) でかつ B が真 (*true*) である時にかぎる．
5. $A \vee B$ の形の論理式が真 (*true*) であるのは，A が真 (*true*) であるか又は B が真 (*true*) である時 (両方真である時も含めて) にかぎる．
6. $\neg A$ の形の論理式が真 (*true*) であるのは，A が偽 (*false*) である時 (即ち A が真でない時) にかぎる．
7. $A \to B$ の形の論理式が真 (*true*) であるのは，A が真 (*true*) であれば B も真 (*true*) であること，即ち，A が偽 (*fasle*) であるか B が真 (*true*) となることである．
8. $A \leftrightarrow B$ の形の論理式が真 (*true*) であるのは，A と B が同じ真理値をとる時にかぎる．

特に，4〜8 は，論理記号の意味を真偽概念を使って定義したものであると言える．ここで注意を要するのは，ここで与えた論理記号の意味と日常言語における対応する接続詞等の意味とが必ずしも常に一致しているとは限らない，ということである．日常言語においては，言葉の意味を曖昧に用いている場合がよくある．この曖昧さが日常言語を用いて論理的分析をする際の困難のもとになっている．ここに論理的分析に適した人工言語を考える動機がある．そして，この人工言語の上で曖昧さのない言葉の意味を与えておいて，その上でこのフレームワークを用いて論理的分析を行おうとするのである．

さて，今，*true* を $\boldsymbol{t}$，*false* を $\boldsymbol{f}$ と表す．上で与えられた意味付与は，次のような真理表で表すことができる．

1. $\top$ はつねに値 $\boldsymbol{t}$ をもつ

$\top$
$\boldsymbol{t}$

2. $\bot$ はつねに値 $\boldsymbol{f}$ をもつ

$\bot$
$\boldsymbol{f}$

3. P は値 $\boldsymbol{t}$ または $\boldsymbol{f}$ をもつ

P
$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$

4.

[2] 命題論理における意味は，真 (*true*)，偽 (*false*) のみである．

A	B	$A \wedge B$	
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	A が $\boldsymbol{t}$, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \wedge B$ も $\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	A が $\boldsymbol{t}$, B が $\boldsymbol{f}$ なら $A \wedge B$ は $\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	A が $\boldsymbol{f}$, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \wedge B$ は $\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	A が $\boldsymbol{f}$, B が $\boldsymbol{f}$ なら $A \wedge B$ は $\boldsymbol{f}$

5.

A	B	$A \vee B$	
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	A が $\boldsymbol{t}$, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ も $\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	A が $\boldsymbol{t}$, B が $\boldsymbol{f}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	A が $\boldsymbol{f}$, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	A が $\boldsymbol{f}$, B が $\boldsymbol{f}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{f}$

6.

A	$\neg A$	
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	A が $\boldsymbol{t}$ なら $\neg A$ は $\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	A が $\boldsymbol{f}$ なら $\neg A$ は $\boldsymbol{t}$

7.

A	B	$A \to B$	
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	A が $\boldsymbol{t}$, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \to B$ は $\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	A が $\boldsymbol{t}$, B が $\boldsymbol{f}$ なら $A \to B$ は $\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	A が $\boldsymbol{f}$, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \to B$ は $\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	A が $\boldsymbol{f}$, B が $\boldsymbol{f}$ なら $A \to B$ は $\boldsymbol{t}$

8.

A	B	$A \leftrightarrow B$	
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	A が $\boldsymbol{t}$, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \leftrightarrow B$ は $\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	A が $\boldsymbol{t}$, B が $\boldsymbol{f}$ なら $A \leftrightarrow B$ は $\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	A が $\boldsymbol{f}$, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \leftrightarrow B$ は $\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	A が $\boldsymbol{f}$, B が $\boldsymbol{f}$ なら $A \leftrightarrow B$ は $\boldsymbol{t}$

以上のような意味付与規則をもとにこれらを組み合わせることにより, 任意の論理式に対して真理値を与えることができる。その例をいくつか挙げる。

例 3.1

(1) $P \wedge Q \to \neg P$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$P \wedge Q \to \neg P$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$

(2) $R \to \bot \vee Q$

$\perp$	Q	R	$\perp \vee Q$	$R \to \perp \vee Q$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$

(3) $R \to P \vee Q$

P	Q	R	$P \vee Q$	$R \to P \vee Q$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$

上の 7 による $A \to B$ の真理表は，次の $\neg A \vee B$ の真理表と結果が同じになることが分かる．

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$

この意味で，$\to$ は $\neg$ と $\vee$ を使って $A \to B$ を $\neg A \vee B$ の形で定義可能であることが分かる．

定義 3.4 (トートロジー) すべての命題変項の可能な真理値に対して, 常に真となるような論理式は**トートロジー**と呼ばれる．論理式 A がトートロジーの時，$\models A$ と書く.

次にトートロジーの例を示す.

例 3.2

1. $A \vee \neg A$

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$

2. $A \to A$

A	$A \to A$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$

3. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

A	B	$A \land B$	$\neg(A \land B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \lor \neg B$	$\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B)$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$

4. $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \lor B)$

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$\neg A \lor B$	$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \lor B)$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$

練習問題 3.1 次の論理式がトートロジーであることを示せ.

1. $A \leftrightarrow (\neg\neg A)$
2. $\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$
3. $(\neg A \to (A \to B)) \lor A$
4. $(\neg A \to (A \land \neg B)) \to A$

練習問題 3.2 次の論理式がトートロジーであるかどうか判定せよ.

1. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
2. $(A \land \neg A) \to B$
3. $(A \lor B) \to A$
4. $B \to (A \land B)$
5. $A \to (A \lor B)$
6. $(\neg A \lor \neg B) \to \neg(A \lor B)$
7. $(A \land (A \land B)) \leftrightarrow A$
8. $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \land B) \to C)$
9. $(A \land (B \lor C)) \leftrightarrow ((A \land B) \lor (A \land C))$

練習問題 3.3

1. $A \leftrightarrow B$ が $\to$ と $\land$ を用いて，$(A \to B) \land (B \to A)$ と定義できることを示せ.
2. $A \land B$ が $\lor$ と $\neg$ を用いて $\neg(\neg A \lor \neg B)$ と定義できることを示せ.
3. $A \lor B$ が $\land$ と $\neg$ を用いて $\neg(\neg A \land \neg B)$ と定義できることを示せ.

3.3 命題論理の証明論

先に我々が導入した命題論理の形式言語は，命題変項 $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, \ldots$，命題定項 $\top$，$\bot$，そして論理記号 $\wedge$，$\vee$，$\neg$，$\to$ から成っていた．そして，そこでは P，Q，R，$P \wedge Q$，$\neg R$，$(P \wedge Q) \to R$，$\ldots$ 等の記号列が論理式として用いられていた．論理式とは通常の自然言語の文に対応するものであった．一方，自然言語においては複数の文から文章が構成される．本節では，命題論理言語に対する文章を考える．ここで論理的言語における文章とは論証のことである．論証のことを論理学では**証明**とも呼ぶ．一つの証明は多くの文 (論理式) から成る．証明において，各論理式は論理的推論規則に従って導入される．論理的推論規則に従って次々に論理式が生成されることを通して証明と呼ばれる論理的文章が構成されるわけである．この論理的形式言語上での証明概念は，通常の日常言語で行われている論証の論理構造を抽象的に表したものだと考えられる．

任意の論理式 $A, B_1, \ldots, B_n$ に対して，**開いた前提** $B_1, \ldots, B_n$ **を持つ** A **の証明構造**という概念を定義する．ここで「P が開いた前提 $B_1, \ldots, B_n$ を持つ A の証明構造である」とは，内容的には「P は $B_1, \ldots, B_n$ という前提から A という結論を導く論証である」ことを表す．ここで，$B_1, \ldots, B_n$ には，同じ形の論理式が重複して現れる場合を含むこととする．実際，下の証明構造の定義から明らかになるように，開いた前提 B_i と B_j (ただし $i \neq j$) とが論理式としてはまったく同じ形をしているとしても，それらは考えている証明構造の中で異なる場所 (位置) に現れているのであり，よって現れる場所 (位置) をも含めて論理式を同定することにすると，B_i と B_j とは「異なる」と考えられるのである．以下において，**開いた前提の集合**と呼ぶときは，このように違った位置に現れる 2 つの同形の論理式をこの集合の異なる要素として取り扱うこととする．

命題論理の自然演繹体系

定義 3.5 (自然演繹体系 NK の証明構造) **証明構造**とは次のような構造のことと定義する．

0. **公理：** 任意の論理式 A はそれ自体が A の証明構造である．このときその論理式 A 自体はこの証明構造の**開いた前提**であると言われる．ここで，この 1 つの論理式だけから成る証明構造の開いた前提の集合は，この論理式 A だけから成る一元集合 (1 つの元のみからなる集合) である．

1. $\wedge$– **導入規則 ($\wedge$–I と略記)：** 今，次のような A の証明構造 P_1 と B の証明構造 P_2 が与えられているとする．ここで $C_1 \cdots C_n$ は A の証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とし，$D_1 \cdots D_m$ は B の証明構造 P_2 に現れる開いた前提の集合とする．

$$P_1 \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ A \end{array} \right. \qquad P_2 \left\{ \begin{array}{c} D_1 \cdots D_m \\ \vdots \\ B \end{array} \right.$$

このとき，この 2 つの証明構造 P_1，P_2 に次の形の $\wedge$–I 規則を適用して得られる構造 P は $A \wedge B$ の証明構造である．

$$P \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1 \cdots C_n & D_1 \cdots D_m \\ \vdots & \vdots \end{array} \\ \dfrac{\begin{array}{cc} A & \quad B \end{array}}{A \wedge B} \ \wedge\text{–}I \end{array} \right.$$

ここで，$A \wedge B$ の証明構造 P の開いた前提の集合は，P_1 の開いた前提の集合 $C_1, \ldots, C_n$ と P_2 の開いた前提の集合 $D_1, \ldots, D_m$ の和集合 $C_1, \ldots, C_n, D_1, \ldots, D_m$ のこととする．

2. $\wedge-$ **消去規則 (左) ($\wedge$–E(左) と略記)：** 今，次のような $A\wedge B$ の証明構造 P_1 が与えられているとする．ここで $C_1,\ldots,C_n$ は証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とする．

$$P_1\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \ddots\ \vdots\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \vdots \\ A\wedge B \end{array}\right.$$

このとき，この証明構造 P_1 に次の形の $\wedge$–E(左) 規則を適用して得られる構造 P は A の証明構造である．

$$P\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \ddots\ \vdots\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \vdots \\ \dfrac{A\wedge B}{A}\ {\scriptstyle \wedge-E(\text{左})} \end{array}\right.$$

ここで，A の証明構造 P の開いた前提の集合は P_1 の開いた前提の集合 $C_1,\ldots,C_n$ のこととする．

3. $\wedge-$ **消去規則 (右) ($\wedge$–E(右) と略記)：** 今，次のような $A\wedge B$ の証明構造 P_1 が与えられているとする．ここで $C_1\cdots C_n$ は証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とする．

$$P_1\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \ddots\ \vdots\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \vdots \\ A\wedge B \end{array}\right.$$

このとき，この証明構造 P_1 に次の形の $\wedge$–E 規則 (右) を適用して得られる構造 P は B の証明構造である．

$$P\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \ddots\ \vdots\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \vdots \\ \dfrac{A\wedge B}{B}\ {\scriptstyle \wedge-E(\text{右})} \end{array}\right.$$

ここで，B の証明構造 P の開いた前提の集合は P_1 の開いた前提の集合 $C_1,\ldots,C_n$ のこととする．

4. $\rightarrow -$ **導入規則 ($\rightarrow$ –I と略記)：** 今，次のような B の証明構造 P_1 が与えられているとする．ここで $A,A,\ldots,A,C_1,\ldots,C_n$ は B の証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合 (の適当な順番による枚挙) とする．特に $A,A,\ldots,A,C_1,\ldots,C_n$ における最初の $A,A,\ldots,A$ は論理式 A の (開いた前提としての) 現れのうちのいくつかを指定したものであるとする．

$$P_1\left\{\begin{array}{c} A\ A\cdots A\ C_1\cdots C_n \\ \ddots\ \vdots\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \vdots \\ B \end{array}\right.$$

この証明構造に次の形の $\rightarrow$ –I 規則を適用し，上で指定した開いた前提 $A,\ldots,A$ にカギカッコを付けて “ $[A]$ ” として得られた構造 P は $A\rightarrow B$ の証明構造である．

$$P\left\{\begin{array}{c} [A]\ [A]\cdots[A]\ C_1\cdots C_n \\ \vdots \\ B \\ \hline A\to B \end{array}\right. \ {\scriptstyle \to - I}$$

ここで，$A \to B$ の証明構造 P の開いた前提の集合は $C_1, \ldots, C_n$ とする．又，P_1 の中で開いた前提として現れていた論理式 $A, \ldots, A$ にカギカッコを付けたもの “ $[A] \ldots [A]$ ” は，この $\to$ –I 規則により (証明構造 P で) **閉じられた前提**と呼ばれる．特にこの証明構造 P_1 の開いた前提の集合の中に A の形の論理式が (複数) 現れていてもよい．又，$[A] \ldots [A]$ が空列のとき (即ち，この $\to$ –I 規則で閉じる前提が 1 つもない場合) も，特別な場合として含めることとする．

従って，証明構造 P の開いた前提は

(P の開いた前提の集合) = (P_1の開いた前提の集合) – (新たにカギカッコが付いた A の集合)

として与えられることとなる．

5. $\to$ – **消去規則 ($\to$ –E と略記)：** 今，次のような A の証明構造 P_1 と，$A \to B$ の証明構造 P_2 が与えられているとする．ここで $C_1, \ldots, C_n$ は A の証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とし，$D_1, \ldots, D_m$ は $A \to B$ の証明構造 P_2 に現れる開いた前提の集合とする．

$$P_1\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \vdots \\ A \end{array}\right. \qquad P_2\left\{\begin{array}{c} D_1\cdots D_m \\ \vdots \\ A\to B \end{array}\right.$$

このとき，この 2 つの証明構造に次の形の $\to$ –E 規則を適用した構造 P も証明構造である．

$$P\left\{\begin{array}{cc} C_1\cdots C_n & D_1\cdots D_m \\ \vdots & \vdots \\ A & A\to B \\ \hline \multicolumn{2}{c}{B} \end{array}\right. \ {\scriptstyle \to - E}$$

ここで，証明構造 P の開いた前提の集合は P_1 の開いた前提の集合 $C_1, \ldots, C_n$ と P_2 の開いた前提の集合 $D_1, \ldots, D_m$ の和集合 $C_1, \ldots, C_n, D_1, \ldots, D_m$ であるとする．

6. $\neg$– **導入規則 ($\neg$–I と略記)：** 今，次のような論理定項 $\perp$ の証明構造 P_1 が与えられているとする．ここで $A, A, \ldots, A, B_1, \ldots, B_n$ は論理定項 $\perp$ の証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合 (の適当な順番による枚挙) とする．特に $A, A, \ldots, A, B_1, \ldots, B_n$ における最初の $A, A, \ldots, A$ は論理式の (開いた前提としての) 現れのうちのいくつかを指定したものであるとする．

$$P_1\left\{\begin{array}{c} A\ A\cdots A\ B_1\cdots B_n \\ \vdots \\ \perp \end{array}\right.$$

ここで，この証明構造 P_1 に次の形の $\neg$–I 規則を適用し，上で指定した開いた前提 $A, \ldots, A$ にカギカッコを付けて ($\to$ –I 規則と同様の操作により) 前提を閉ざして得られる構造 P は $\neg A$ の証明構造である．

$$P\left\{\begin{array}{c} [A]\ [A]\cdots[A]\ B_1\cdots B_n \\ \ddots\ \vdots\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{\neg A}\ {\scriptstyle \neg-I} \end{array}\right.$$

ここで，証明構造 P の開いた前提の集合は P_1 の開いた前提の集合 $A, A, \ldots, A, B_1, \ldots, B_n$ から ¬–I 規則により閉ざされた前提の集合 $A, A, \ldots, A$ を除いて得られる集合であるとする．又，→ –I 規則に時と同様に，$B_1, \ldots, B_n$ に論理式 A が現れる場合，及び上で指定した $A, \ldots, A$ が空列である場合も含むこととする．

7. ¬– **消去規則 (¬–E と略記)：** 今，次のような A の証明構造 P_1 と $\neg A$ の証明構造 P_2 が与えられているとする．ここで $C_1, \ldots, C_n$ は A の証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とし，$D_1, \ldots, D_m$ は $\neg A$ の証明構造 P_2 の証明構造 P_2 に現れる開いた前提の集合とする．

$$P_1\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \ddots\ \vdots\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \vdots \\ A \end{array}\right. \qquad P_2\left\{\begin{array}{c} D_1\cdots D_m \\ \ddots\ \vdots\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \vdots \\ \neg A \end{array}\right.$$

この 2 つの証明構造 P_1，P_2 に次の形の ¬–E 規則を適用して得られた P も証明構造である．

$$P\left\{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1\cdots C_n & D_1\cdots D_m \\ \ddots\ \vdots\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \ddots\ \vdots\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \vdots & \vdots \end{array} \\ \dfrac{A \qquad\quad \neg A}{\bot}\ {\scriptstyle \neg-E} \end{array}\right.$$

ここで P の開いた前提の集合は，P_1 の開いた前提の集合 $C_1, \ldots, C_n$ と P_2 の開いた前提の集合 $D_1, \ldots, D_m$ の和集合 $C_1, \ldots, C_n, D_1, \ldots, D_n$ であるとする．

8. ∨– **導入規則 (左) (∨–I(左) と略記)：** 今，次のような A の証明構造 P_1 が与えられているとする．ここで $C_1, \ldots, C_n$ は証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とする．

$$P_1\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \ddots\ \vdots\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \vdots \\ A \end{array}\right.$$

この証明構造 P_1 に次の形の ∨–I(左) 規則を適用した構造 P は $A \vee B$ の証明構造である．

$$P\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \ddots\ \vdots\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \vdots \\ \dfrac{A}{A \vee B}\ {\scriptstyle \vee-I(\text{左})} \end{array}\right.$$

ここで，$A \vee B$ の証明構造 P の開いた前提の集合は，P_1 の開いた前提の集合 $C_1, \ldots, C_n$ であるとする．

9. ∨– **導入規則 (右)(∨–I(右) と略記)：** 今，次のような B の証明構造 P_1 が与えられているとする．ここで $C_1, \ldots, C_n$ は証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とする．

$$P_1\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \vdots \\ B \end{array}\right.$$

この証明構造 P_1 に次の形の $\vee$–I(右) 規則を適用した構造 P は $A\vee B$ の証明構造である．

$$P\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \vdots \\ \dfrac{B}{A\vee B}\ \vee\!-\!I(右) \end{array}\right.$$

ここで，$A\vee B$ の証明構造 P の開いた前提の集合は，P_1 の開いた前提の集合 $C_1,\ldots,C_n$ であるとする．

10. $\vee$– **消去規則** ($\vee$–**E と略記**)**：** 今，次のような 3 つの証明構造が与えられているとする．

(1) $A\vee B$ の証明構造 P_1

(2) C の証明構造 P_2

(3) C の証明構造 P_3

(1) $$P_1\left\{\begin{array}{c} D_1\cdots D_n \\ \vdots \\ A\vee B \end{array}\right.$$

(2) $$P_2\left\{\begin{array}{c} A\ A\cdots A\ E_1\cdots E_m \\ \vdots \\ C \end{array}\right.$$

(3) $$P_3\left\{\begin{array}{c} B\ B\cdots B\ G_1\cdots G_l \\ \vdots \\ C \end{array}\right.$$

ここで $A,A,\ldots,A,E_1,\ldots,E_m$ は証明構造 P_2 に現れる開いた前提の集合とし，$B,B,\ldots,B,G_1,\ldots,G_l$ は証明構造 P_3 に現れる開いた前提の集合とする．特に $A,A,\ldots,A,E_1,\ldots,E_m$ における最初の $A,A,\ldots,A$ 及び $B,B,\ldots,B,G_1,\ldots,G_l$ における最初の $B,B,\ldots,B$ は，それぞれ論理式 A 及び B の (開いた前提としての) 現れのうちのいくつかを指定したものであるとする．

このとき，これら 3 つの証明構造 P_1，P_2，P_3 に次の形の $\vee$–E 規則を適用し，P_2 の開いた前提として現れる論理式 A 及び P_3 の開いた前提として現れる論理式 B のうちの上で指定されたものをそれぞれカギカッコでくくって "$[A]$"，"$[B]$" として得られる構造 P は C の証明構造である．

$$P\left\{\dfrac{\begin{array}{c} D_1\cdots D_n \\ \vdots \\ A\vee B \end{array}\qquad \begin{array}{c} [A]\ [A]\cdots[A]\ E_1\cdots E_m \\ \vdots \\ C \end{array}\qquad \begin{array}{c} [B]\ [B]\cdots[B]\ G_1\cdots G_l \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ \vee\!-\!E\right.$$

ここで，証明構造 P の開いた前提の集合は，P_1,P_2 及び P_3 の開いた前提の集合の和集合から $\vee$–E 規則により閉ざされた前提の集合を取り除いたものであるとする．又，$\rightarrow$ –I 規則や $\neg$–I 規則の時と同様に，$E_1,\ldots,E_m$ に論理式 A が現れる場合や $G_1,\ldots,G_l$ に論理式 B が現れる場合，及び上で指定した $A,\ldots,A$ や $B,\ldots,B$ がそれぞれ空列である場合も含むこととする．

11. $\bot$– **消去規則** ($\bot$–**E と略記：**) 今，次のような論理定項 $\bot$ の証明構造 P_1 が与えられているとする．ここで $C_1,\ldots,C_n$ は $\bot$ の証明構造に現れる開いた前提の集合とする．

$$P_1\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \vdots \\ \bot \end{array}\right.$$

この証明構造 P_1 に次の形の ⊥–E 規則を適用した構造 P は A の証明構造である．ただし A は任意の論理式とする．

$$P\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{A}\ {\scriptstyle \bot-E} \end{array}\right.$$

ここで，P の開いた前提の集合は P_1 の開いた前提の集合 $C_1,\ldots,C_n$ であるとする．

12. $\neg\neg-$ **消去規則** ($\neg\neg-$**E と略記**)**：** 今，次のような $\neg\neg A$ の証明構造 P_1 が与えられているとする．ここで $C_1,\ldots,C_n$ は，P_1 に現れる開いた前提の集合とする．

$$P_1\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \vdots \\ \neg\neg A \end{array}\right.$$

この証明構造 P_1 に次の形の ¬¬–E 規則を適用した構造 P も証明構造である．

$$P\left\{\begin{array}{c} C_1\cdots C_n \\ \vdots \\ \dfrac{\neg\neg A}{A}\ {\scriptstyle \neg\neg-E} \end{array}\right.$$

ここで，P の開いた前提の集合は P_1 の開いた前提の集合 $C_1,\ldots,C_n$ であるとする．

定義 3.6 (証明) 開いた前提が 1 つも現れない A の証明構造は A **の証明**と呼ばれる．

証明構造という概念が (開いた) 前提のもとで終論理式が証明できることを表しているのに対し，証明概念は何の前提も仮定することなく終論理式が証明できることを表している．

ここで上の証明構造の定義に現れた推論規則を列挙し，又その直観的な内容を与えると次の通りとなる．

命題論理の推論規則

1. $\wedge-$**I：** 2 つの論理式 A と B から論理式 $A\wedge B$ を推論してよい．これを次のように表記することとする．

$$\frac{A\quad B}{A\wedge B}\ {\scriptstyle \wedge-I}$$

2 , 3. $\wedge-$**E：** 論理式 $A\wedge B$ から A を推論してよい．これを次のように表記することとする．

$$\frac{A\wedge B}{A}\ {\scriptstyle \wedge-E} \qquad \text{又は} \qquad \frac{A\wedge B}{B}\ {\scriptstyle \wedge-E}$$

4. $\to -$**I：** A という前提を用いて B へ至る証明が与えられれば，A という仮定を用いることなしに論理式 $A\to B$ を推論してよい．

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^n \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ {\scriptstyle \to -I,n}$$

5. $\to -$**E：** 論理式 A と論理式 $A \to B$ から論理式 B を推論してよい．

$$\dfrac{A \quad A \to B}{B}\ {\scriptstyle \to -E}$$

6. $\neg -$**I：** A という主張から $\bot$(false) が主張されれば，即ち A から矛盾が主張されれば，A という仮定なしに $\neg A$(非 A) が主張できる．

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^n \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\ {\scriptstyle \neg -I,n}$$

7. $\neg -$**E：** A と $\neg A$ が同時に主張されれば，$\bot$，即ち矛盾であることが主張される．

$$\dfrac{A \quad \neg A}{\bot}\ {\scriptstyle \neg -E}$$

8 , 9. $\vee -$**I：** 論理式 A(又は B) から $A \vee B$ を推論してよい．

$$\dfrac{A}{A \vee B}\ {\scriptstyle \vee -I} \qquad \text{又は} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\ {\scriptstyle \vee -I}$$

10. $\vee -$**E：** $A \vee B$ が既に主張され，また，A という仮定からも，B という仮定からも同じ C が主張できるときには，C が主張できる．

$$\dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]^n \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]^n \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ {\scriptstyle \vee -E,n}$$

11. $\bot -$**E：** $\bot$(矛盾) が主張されれば，任意の A が主張できる．

$$\dfrac{\bot}{A}\ {\scriptstyle \bot -E}$$

12. $\neg\neg -$**E：** $\neg\neg A$ が主張されれば，A が主張される．

$$\dfrac{\neg\neg A}{A}\ {\scriptstyle \neg\neg -E}$$

ここでいくつかの例を挙げる．

例 3.3 (証明)

1. $(A \wedge B) \wedge C \to B \wedge (C \wedge A)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(A \wedge B) \wedge C]^1$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge-E$}
\UnaryInfC{$A \wedge B$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge-E$}
\UnaryInfC{B}
\AxiomC{$[(A \wedge B) \wedge C]^1$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge-E$}
\UnaryInfC{C}
\AxiomC{$[(A \wedge B) \wedge C]^1$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge-E$}
\UnaryInfC{$A \wedge B$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge-E$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge-I$}
\BinaryInfC{$C \wedge A$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge-I$}
\BinaryInfC{$B \wedge (C \wedge A)$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to-I,1$}
\UnaryInfC{$(A \wedge B) \wedge C \to B \wedge (C \wedge A)$}
\end{prooftree}
$$

2. $(A \to (B \to C)) \wedge A \to (B \to C)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(A \to (B \to C)) \wedge A]_1$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge-E$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$[(A \to (B \to C)) \wedge A]_1$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge-E$}
\UnaryInfC{$A \to (B \to C)$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to-E$}
\BinaryInfC{$B \to C$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to-I,1$}
\UnaryInfC{$(A \to (B \to C)) \wedge A \to (B \to C)$}
\end{prooftree}
$$

3. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$[A \to B]^2$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to-E$}
\BinaryInfC{B}
\AxiomC{$[\neg B]^3$}
\RightLabel{$\scriptstyle \neg-E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\scriptstyle \neg-I,1$}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to-I,3$}
\UnaryInfC{$\neg B \to \neg A$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to-I,2$}
\UnaryInfC{$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$}
\end{prooftree}
$$

4. $(A \vee B) \vee C \to B \vee (C \vee A)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(A \vee B) \vee C]^1$}
\AxiomC{$[A \vee B]^2$}
\AxiomC{$[A]^3$}
\RightLabel{$\scriptstyle \vee-I$}
\UnaryInfC{$C \vee A$}
\RightLabel{$\scriptstyle \vee-I$}
\UnaryInfC{$B \vee (C \vee A)$}
\AxiomC{$[B]^3$}
\RightLabel{$\scriptstyle \vee-I$}
\UnaryInfC{$B \vee (C \vee A)$}
\RightLabel{$\scriptstyle \vee-E,3$}
\TrinaryInfC{$B \vee (C \vee A)$}
\AxiomC{$[C]^2$}
\RightLabel{$\scriptstyle \vee-I$}
\UnaryInfC{$C \vee A$}
\RightLabel{$\scriptstyle \vee-I$}
\UnaryInfC{$B \vee (C \vee A)$}
\RightLabel{$\scriptstyle \vee-E,2$}
\TrinaryInfC{$B \vee (C \vee A)$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to-I,1$}
\UnaryInfC{$(A \vee B) \vee C \to B \vee (C \vee A)$}
\end{prooftree}
$$

5. $(A \wedge B) \vee C \to (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(A \wedge B) \vee C]^1$}
\AxiomC{$[A \wedge B]^2$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge-E$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$\scriptstyle \vee-I$}
\UnaryInfC{$A \vee C$}
\AxiomC{$[A \wedge B]^2$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge-E$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$\scriptstyle \vee-I$}
\UnaryInfC{$B \vee C$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge-I$}
\BinaryInfC{$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$}
\AxiomC{$[C]^2$}
\RightLabel{$\scriptstyle \vee-I$}
\UnaryInfC{$A \vee C$}
\AxiomC{$[C]^2$}
\RightLabel{$\scriptstyle \vee-I$}
\UnaryInfC{$B \vee C$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge-I$}
\BinaryInfC{$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$}
\RightLabel{$\scriptstyle \vee-E,2$}
\TrinaryInfC{$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to-I,1$}
\UnaryInfC{$(A \wedge B) \vee C \to (A \vee C) \wedge (B \vee C)$}
\end{prooftree}
$$

6. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee C$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A \lor C) \land (B \lor C)]^1}{A \lor C}{\scriptstyle \land-E} \quad \dfrac{\dfrac{[(A \lor C) \land (B \lor C)]^1}{B \lor C}{\scriptstyle \land-E} \quad \dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [B]^3}{A \land B}{\scriptstyle \land-I}}{(A \land B) \lor C}{\scriptstyle \lor-I} \quad \dfrac{[C]^3}{(A \land B) \lor C}{\scriptstyle \lor-I}}{(A \land B) \lor C}{\scriptstyle \lor-E,3} \quad \dfrac{[C]^2}{(A \land B) \lor C}{\scriptstyle \lor-I}}{(A \land B) \lor C}{\scriptstyle \lor-E,2}}{(A \lor C) \land (B \lor C) \to (A \land B) \lor C}{\scriptstyle \to-I,1}$$

7. $(A \lor B) \land C \to (A \land C) \lor (B \land C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A \lor B) \land C]^1}{A \lor B}{\scriptstyle \land-E} \quad \dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad \dfrac{[(A \lor B) \land C]^1}{C}{\scriptstyle \land-E}}{A \land C}{\scriptstyle \land-I}}{(A \land C) \lor (B \land C)}{\scriptstyle \lor-I} \quad \dfrac{\dfrac{[B]^2 \quad \dfrac{[(A \lor B) \land C]^1}{C}{\scriptstyle \land-E}}{B \land C}{\scriptstyle \land-I}}{(A \land C) \lor (B \land C)}{\scriptstyle \lor-I}}{(A \land C) \lor (B \land C)}{\scriptstyle \lor-E,2}}{(A \lor B) \land C \to (A \land C) \lor (B \land C)}{\scriptstyle \to-I,1}$$

8. $(A \land C) \lor (B \land C) \to (A \lor B) \land C$

$$\dfrac{\dfrac{[(A \land C) \lor (B \land C)]^1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \land C]^2}{A}{\scriptstyle \land-E}}{A \lor B}{\scriptstyle \lor-I} \quad \dfrac{[A \land C]^2}{C}{\scriptstyle \land-E}}{(A \lor B) \land C}{\scriptstyle \land-I} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \land C]^2}{B}{\scriptstyle \land-E}}{A \lor B}{\scriptstyle \lor-I} \quad \dfrac{[B \land C]^2}{C}{\scriptstyle \land-E}}{(A \lor B) \land C}{\scriptstyle \land-I}}{(A \lor B) \land C}{\scriptstyle \lor-E,2}}{(A \land C) \lor (B \land C) \to (A \lor B) \land C}{\scriptstyle \to-I,1}$$

9. $A \to (\neg\neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [\neg A]^1}{\bot}{\scriptstyle \neg-E}}{\neg\neg A}{\scriptstyle \neg-I,1}}{A \to \neg\neg A}{\scriptstyle \to-I,2}$$

10. $(\neg\neg A) \to A$

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\neg A]^1}{A}{\scriptstyle \neg\neg-E}}{\neg\neg A \to A}{\scriptstyle \to-I,1}$$

11. $\neg(A \lor B) \to (\neg A \land \neg B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \lor B}{\scriptstyle \lor-I} \quad [\neg(A \lor B)]^3}{\bot}{\scriptstyle \neg-E}}{\neg A}{\scriptstyle \neg-I,1} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^2}{A \lor B}{\scriptstyle \lor-I} \quad [\neg(A \lor B)]^3}{\bot}{\scriptstyle \neg-E}}{\neg B}{\scriptstyle \neg-I,2}}{\neg A \land \neg B}{\scriptstyle \land-I}}{\neg(A \lor B) \to (\neg A \land \neg B)}{\scriptstyle \to-I,3}$$

12. $(\neg A \land \neg B) \to \neg(A \lor B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \lor B]^2 \quad \dfrac{[A]^1 \quad \dfrac{[\neg A \land \neg B]^3}{\neg A}\,{\scriptstyle \land - E}}{\bot}\,{\scriptstyle \neg - E} \quad \dfrac{[B]^1 \quad \dfrac{[\neg A \land \neg B]^3}{\neg B}\,{\scriptstyle \land - E}}{\bot}\,{\scriptstyle \neg - E}}{\bot}\,{\scriptstyle \lor - E,1}}{\neg(A \lor B)}\,{\scriptstyle \neg - I,2}}{(\neg A \land \neg B) \to \neg(A \lor B)}\,{\scriptstyle \to - I,3}$$

13. $(A \to B) \to (\neg A \lor B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [A \to B]^3}{B}\,{\scriptstyle \to - E}}{\neg A \lor B}\,{\scriptstyle \lor - I} \quad [\neg(\neg A \lor B)]^2}{\bot}\,{\scriptstyle \neg - E}}{\neg A}\,{\scriptstyle \neg - I,1}}{\neg A \lor B}\,{\scriptstyle \lor - I} \quad [\neg(\neg A \lor B)]^2}{\bot}\,{\scriptstyle \neg - E}}{\neg\neg(\neg A \lor B)}\,{\scriptstyle \neg - I,2}}{\neg A \lor B}\,{\scriptstyle \neg\neg - E}}{(A \to B) \to (\neg A \lor B)}\,{\scriptstyle \to - I,3}$$

14. $(\neg A \lor B) \to (A \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A \lor B]^3 \quad \dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [\neg A]^1}{\bot}\,{\scriptstyle \neg - E}}{B}\,{\scriptstyle \bot - E} \quad [B]^1}{B}\,{\scriptstyle \lor - E,1}}{A \to B}\,{\scriptstyle \to - I,2}}{(\neg A \lor B) \to (A \to B)}\,{\scriptstyle \to - I,3}$$

15. $(\neg A \to (A \land \neg B)) \to A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^1 \quad [\neg A \to (A \land \neg B)]^2}{A \land \neg B}\,{\scriptstyle \to - E}}{A}\,{\scriptstyle \land - E} \quad [\neg A]_1}{\bot}\,{\scriptstyle \neg - E}}{\neg\neg A}\,{\scriptstyle \neg - I,1}}{A}\,{\scriptstyle \neg\neg - E}}{(\neg A \to (A \land \neg B)) \to A}\,{\scriptstyle \to - I,2}$$

定義 3.7 (証明可能) 論理式 A を終論理式とする証明が存在するとき，A **は証明可能である**と言うことにする．この時, $\vdash A$ と書く．また，仮定 $B_1, \ldots, B_n$ から A が推論規則にしたがって主張できる時，$B_1, \ldots, B_n \vdash A$ と書く．

定理 3.1 (健全性 (soundness)) 証明可能な論理式はすべてトートロジーである．この性質を持つ論理体系を**健全である**という．よって命題論理の自然演繹体系は健全である．

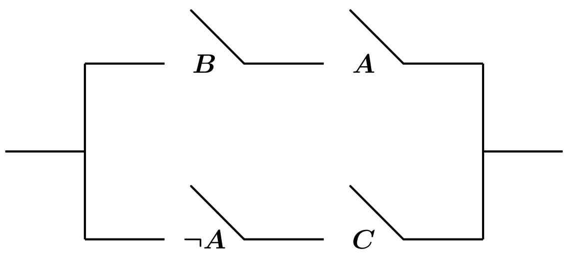
定理 3.2 (完全性 (completeness)) トートロジーな論理式は，すべて証明可能である．この性質を持つ論理体系を**完全である**という．よって命題論理の自然演繹体系は完全である．

練習問題 3.4 先の練習問題 **3.2** のトートロジーとなるすべての論理式が証明可能であることを示せ。

練習問題 3.5 次の論理式が証明可能であることを示せ．

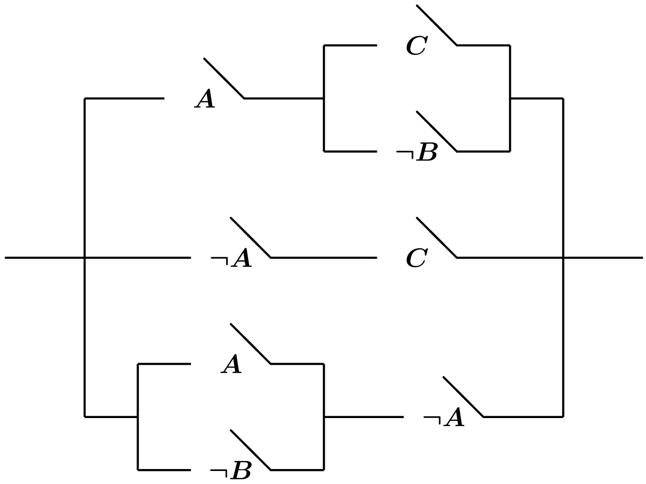
1. $(A \land B \to C) \to (A \to (B \to C))$
2. $(A \to (B \to C)) \to (A \land B \to C)$
3. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
4. $(A \lor B \to C) \to ((A \to C) \land (B \to C))$

練習問題 3.6 次のような電器回路を考えることにする．ここで $A, B, C, \ldots$ 等の原始論理式は on-off スイッチを表わしているものとする．on-off スイッチとはそのスイッチの場所で電源をオン (流す) かオフ (止める) かのどちらかを指定するスイッチである．$\neg A$ という名前のスイッチはスイッチ A と連動して，A がオンの時に $\neg A$ はオフに，又 A がオフの時 $\neg A$ がオンになるスイッチである，とする．今電器回路の並列を $\lor$ で，直列を $\land$ で表わすことにより，回路全体の電流の状態が論理式で表現できる．



は，$(B \land A) \lor (\neg A \land C)$ で表わせる．今，電器回路の観点から見ると A, B, C のスイッチ状態に対する回路全体に電流が流れるかどうかの状態の関係が同じであれば，回路の仕様 (Spec) が違っても同じ役割を果たす，と考えてよい．このことは，次のように論理的に表現できる．(命題論理の $\neg$，$\lor$，$\land$ を用いた) 各論理式は電器回路の各仕様を表現し，もし論理式 A と論理式 B とが同値 $(A \equiv B)$ であれば，回路 A と回路 B とはおなじ役割を果たす．

1. まず，次の回路を論理式で表わせ．



2. 次に，この回路と同じ役割を果たす最も単純な回路を与えよ．(そして，実際に，その回路がもとのものと同値であることを論理的に証明せよ．)

練習問題 3.7 次の前提より，定理を導き出せ．

1. 今日晴れているならば，僕はテニスをする．

$$晴れる \to テニスをする$$

2. 僕が勉強するならば，僕はテニスをしない．

$$勉強する \to \neg テニスをする$$

3. 僕の気分がよければ，その日は必ず晴れている．

$$気分がよい \to 晴れる$$

4. 僕の気分が悪ければ，僕は勉強しない．

$$\neg 気分がよい \to \neg 勉強する$$

(定理) 僕は，今日勉強しない．

$$\neg 勉強する$$

練習問題 3.8 次の前提より，定理を導き出せ．

1. 神が存在し，私が神を信じるならば, 私は救われる．

$$神 \wedge 信 \to 救$$

2. 神が存在しなければ，悪魔が存在する．

$$\neg 神 \to 悪魔$$

3. 私が救われるならば，神は存在する．

$$救 \to 神$$

4. 悪魔が存在するならば，私は神を信じる．

$$悪魔 \to 信$$

(定理 1) 私が救われることなく，しかも私が神を信じるならば，悪魔が存在する．

$$\neg救 \wedge 信 \to 悪魔$$

(定理 2) 神が存在するか，私が神を信じると悪魔が存在することが同値であるかである．

$$神 \vee (信 \leftrightarrow 悪魔)$$

練習問題 3.9 次の前提より，定理を導き出せ．

1. 2 本足であるならば，鳥であるか，人間である．

$$2本足 \to 鳥 \vee 人間$$

2. 鳥は空を飛べる．

$$鳥 \to 飛$$

(定理) 2 本足で空を飛べないならば，人間である．

$$2本足 \wedge \neg飛 \to 人間$$

(参考) 自然演繹体系の基本定理： 正規化定理 (Proof-Normalization)

証明の中で次のような形で現れる論理式 $A \wedge B$，$A \to B$，$\neg A$ を**極大論理式 (maximal 論理式)** と呼ぶ．即ち極大論理式とは，(自然演繹の) 証明中に導入規則を用いて現われ，すぐその後に消去規則で消えてしまうような，いわば不用な論理式である．

$$\dfrac{\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\,{\scriptstyle \wedge-I}}{A}\,{\scriptstyle \wedge-E} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\,{\scriptstyle \wedge-I}}{B}\,{\scriptstyle \wedge-E}$$

$$\dfrac{\dfrac{A}{A \vee B}\,{\scriptstyle \vee-I} \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\,{\scriptstyle \vee-E} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{B}{A \vee B}\,{\scriptstyle \vee-I} \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\,{\scriptstyle \vee-E}$$

$$\dfrac{A \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\,{\scriptstyle \to-I}}{B}\,{\scriptstyle \to-E}$$

$$\dfrac{A \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\,{\scriptstyle \neg-I}}{F}\,{\scriptstyle \neg-E}$$

このような不用な論理式を全く含まない証明にすべての証明が変換できる．それは，次の定理で表現される．ここで極大論理式を含まない証明を**正規形証明**と呼ぶ．

定理 3.3 (正規化定理 (Normalization Theorem)) 自然演繹体系の任意の証明は，次の $\beta-$ 簡約規則 ($\beta-$ reduction rules) の適当な有限回の適用により正規形証明に変形できる．

Reduction rules

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}| & | \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}\ {\scriptstyle \wedge-I}}{A}\ {\scriptstyle \wedge-E} \quad\Longrightarrow\quad \begin{matrix}| \\ A\end{matrix} \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}| & | \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}\ {\scriptstyle \wedge-I}}{B}\ {\scriptstyle \wedge-E} \quad\Longrightarrow\quad \begin{matrix}| \\ B\end{matrix}$$

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}| \\ A\end{matrix}}{A \vee B}\ {\scriptstyle \vee-I} \quad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ {\scriptstyle \vee-E} \quad\Longrightarrow\quad \begin{matrix}| \\ A \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}| \\ B\end{matrix}}{A \vee B}\ {\scriptstyle \vee-I} \quad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ {\scriptstyle \vee-E} \quad\Longrightarrow\quad \begin{matrix}| \\ B \\ \vdots \\ C\end{matrix}$$

$$\cfrac{\begin{matrix}| \\ A\end{matrix} \quad \cfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ {\scriptstyle \to-I}}{B}\ {\scriptstyle \to-E} \quad\Longrightarrow\quad \begin{matrix}| \\ A \\ \vdots \\ B\end{matrix}$$

$$\cfrac{\begin{matrix}| \\ A\end{matrix} \quad \cfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\ {\scriptstyle \neg-I}}{\bot}\ {\scriptstyle \neg-E} \quad\Longrightarrow\quad \begin{matrix}| \\ A \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}$$

証明　今，証明 P が与えられたとする．今 P が正規形でないとする．証明 P に現れる極大論理式のうち論理記号を最も多く含むもの (今，この論理記号の数を n 個とする) を枚挙する．論理記号を n 個含む論理式のことを「長さ n の論理式」と呼ぶこととする．このような長さ n の極大論理式のうちで証明 P の一番左上に現れるものから順に上の簡約規則を適用していく．(証明 P は木構造を持つので，常に「一番左の枝の一番上に現れる，長さ n の極大論理式」は一意的に規定される．) 今，各 1 回の簡約規則の適用により，証明 P に現れる長さ n の極大論理式の数は 1 つ減ることに注意すると，個の操作を高々有限回行った後に，長さ n の極大論理式を 1 つも含まない証明 P_1 が得られる．よって，P_1 に現れる極大論理式はすべて長さが n より小さいことが分かる．今 P_1 が既に正規形であれば操作は終了する．もし P_1 が正規形でないとする．P_1' に現れる極大論理式の最大の長さを $n_1 < n$ として，n' に対して上と同じ操作をくり返す．この手続きは有限回で終了し，正規形証明が得られる．**証明終**

次のより強い形の正規化定理も成り立つ．

定理 3.4 (強正規化定理 (Strong Normalization Theorem)) 自然演繹体系の任意の証明に対して適用可能な $\beta-$ 簡約規則を任意に選んで変形していく操作は，$\beta-$ 簡約規則の適用の順番によらず必ず有限回で停止する (特に，この停止した証明は正規形である)．

例 3.4 次に $\neg(A\lor B)\to\neg A$ の証明に対する $\beta-$ 簡約規則による正規化の例を示す．下の最初の証明は例 2.3(2) で与えた $\neg(A\lor B)\to\neg A\land\neg B$ を利用して構成した証明である．ただしこの証明は極大論理式を含んでいる．$\beta-$ 簡約規則を 2 回適用することによって下の最後の証明のような正規形証明が得られる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A\lor B)]^4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A\lor B}{\scriptstyle\lor-I} \quad [\neg(A\lor B)]^3}{\bot}{\scriptstyle\neg-E}}{\neg A}{\scriptstyle\neg-I,1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^2}{A\lor B}{\scriptstyle\lor-I} \quad [\neg(A\lor B)]^3}{\bot}{\scriptstyle\neg-E}}{\neg B}{\scriptstyle\neg-I,2}}{\neg A\land\neg B}{\scriptstyle\land-I}}{\neg(A\lor B)\to\neg A\land\neg B}{\scriptstyle\to-I,3}}{\neg A\land\neg B}{\scriptstyle\to-E}}{\neg A}{\scriptstyle\land-E}}{\neg(A\lor B)\to\neg A}{\scriptstyle\to-I,4}$$

$$\Longrightarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A\lor B}{\scriptstyle\lor-I} \quad [\neg(A\lor B)]^3}{\bot}{\scriptstyle\neg-E}}{\neg A}{\scriptstyle\neg-I,1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^2}{A\lor B}{\scriptstyle\lor-I} \quad [\neg(A\lor B)]^3}{\bot}{\scriptstyle\neg-E}}{\neg B}{\scriptstyle\neg-I,2}}{\neg A\land\neg B}{\scriptstyle\land-I}}{\neg A}{\scriptstyle\land-E}}{\neg(A\lor B)\to\neg A}{\scriptstyle\to-I,3}$$

$$\Longrightarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A\lor B}{\scriptstyle\lor-I} \quad [\neg(A\lor B)]^2}{\bot}{\scriptstyle\neg-E}}{\neg A}{\scriptstyle\neg-I,1}}{\neg(A\lor B)\to\neg A}{\scriptstyle\to-I,2}$$

練習問題 3.10 次の証明を正規化して，正規形証明を求めよ．

$$\dfrac{\dfrac{\bot}{\neg(A\lor\neg A)\to\bot}{\scriptstyle 7}}{}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A\lor\neg A)]^7 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A\lor\neg A} \quad [\neg(A\lor\neg A)]^3}{\bot}}{\neg A}{\scriptstyle 1} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^2}{A\lor\neg A} \quad [\neg(A\lor\neg A)]^3}{\bot}}{\neg\neg A}{\scriptstyle 2}}{\neg A\land\neg\neg A}}{\neg(A\lor\neg A)\to\neg A\land\neg\neg A}{\scriptstyle 3}}{\neg A\land\neg\neg A}}{\neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(A\lor\neg A)]^7 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^4}{A\lor\neg A} \quad [\neg(A\lor\neg A)]^6}{\bot}}{\neg A}{\scriptstyle 4} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^5}{A\lor\neg A} \quad [\neg(A\lor\neg A)]^6}{\bot}}{\neg\neg A}{\scriptstyle 5}}{\neg A\land\neg\neg A}}{\neg(A\lor\neg A)\to\neg A\land\neg\neg A}{\scriptstyle 6}}{\neg A\land\neg\neg A}}{\neg\neg A}}{\dfrac{\bot}{\neg(A\lor\neg A)\to\bot}{\scriptstyle 7}}$$

第 4 章　証明可能性，充足可能性，可能世界モデル

今まで，命題論理，述語論理という人工言語を設定して，それぞれの証明論を定め，それぞれの意味論を真理表やモデルという形で与えてきた．そして，証明論における証明可能性という概念と意味論におけるトートロジーという概念と実は一致しているということを，完全性定理という形で表現してきた．この節の目的は，これを少し違った観点から見ることである．

命題論理

まず，次の (議論 A) を考えてみる．

(議論 A)　(1)　切る理由があれば僕は髪を切る．　(理由がある $\to$ 髪を切る)
(2)　しかし，何も切る理由がない．　($\neg$ 理由がある)
(3)　よって，僕は髪を切らない．　($\neg$ 髪を切る)

さて，この議論は論理的に正当であると言えるだろうか．もし，論理的に正当であるならば，次が証明可能なはずである．

$$(1) \wedge (2) \to (3)$$

ところが，実際に証明を試みてみると，どうも簡単に証明できないことが分かる．

もし，ある議論が論理的に正当であるならば，その「証明」を証明論の推論規則を使って構成すること可能であり，それによって，その正当性が示される．では,「証明が正当ではない」という事は，どの様にして示すことができるのであろうか.

ひとつの可能性は，結論の否定を証明することである．つまり，次を証明することである．

$$(1) \wedge (2) \to \neg(3)$$

しかし，上の (議論 A) では，これは証明できそうもない従って (議論 A) が論理的に正当なものであるかどうかは，我々の証明論の上では決定できないということになる．

練習問題 4.1 (議論A) の (1) の代わりに次の $(1')$ を考えると $(1') \wedge (2) \to (3)$ が証明可能であることを示せ．

(1')　理由がある時かつその時にかぎり髪を切る．(理由がある $\leftrightarrow$ 髪を切る)

(解答)　$\leftrightarrow$ の定義より，“理由がある $\leftrightarrow$ 髪を切る” は “(髪を切る $\to$ 理由がある) $\wedge$ (理由がある $\to$ 髪を切る)”．

$$\dfrac{\dfrac{[\text{髪を切る}]^1 \quad \dfrac{(\text{髪を切る} \to \text{理由がある}) \wedge (\text{理由がある} \to \text{髪を切る})}{\text{髪を切る} \to \text{理由がある}}\,{\scriptstyle \wedge-E}}{\dfrac{\text{理由がある} \qquad \neg\text{理由がある}}{\perp}\,{\scriptstyle \neg-E}}\,{\scriptstyle \to-E}}{\neg\text{髪を切る}}\,{\scriptstyle \neg-I_1}$$

今，(議論 A) を証明論の観点から意味論の観点に移して考えてみよう．完全性定理によれば,「$(1)\wedge(2) \to (3)$ が証明可能である」という証明論的概念は,「$(1) \wedge (2) \to (3)$ が論理的に真 (トートロジー) である」とという意味論的概念と同値であった．このことから，次が言える．

$$((1) \wedge (2) \to (3) \text{ はトートロジーではない}) \Longrightarrow ((1) \wedge (2) \to (3) \text{ は証明可能ではない})$$

ここで，もし前件が示されれば,「$(1) \wedge (2) \to (3)$ は証明可能ではない」ということが示されたことになる．

前件を示すには，(1) と (2) がともに真となり，(3) が偽となる世界が構成可能であることを示せばよい．このような世界を，**カウンターモデル (counter-model)** 又は**反例**というが，このようにカウンターモデルを構成することによって，当の論理式が証明可能ではないことを示せるのである．

もちろん,「$(1) \wedge (2) \to (3)$ が証明不可能である」ということを示す為に，すべての可能な証明を枚挙するという方法も考えられる．しかし，これは技術的に不可能である．というのは，一般にすべての証明の枚挙は無限に続くからである．[1] よって，証明不可能であることは，上で示したような意味論のレベルで考えた方がうまく行くのである．

さて，カウンターモデルを構成するにはどのような手続きをとればよいのだろうか．すべての原子論理式に付値 (真偽値) を与えれば，その世界のすべての論理式の真偽値が，我々の論理的意味論によって決定されることを思い出せば，命題論理の場合，真理表を作ってやればよいことが分かる．というのは，真理表というのは，可能な世界を一つ一つ枚挙するための 1 つの方法であるからである．

今，$(1) \wedge (2) \to (3)$ の真理表を作ってみる．

		理由がある	髪を切る	(1)	(2)	(3)	$(1) \wedge (2)$	$(1) \wedge (2) \to (3)$
世界	(i)	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
世界	(ii)	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
世界	(iii)	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$
世界	(iv)	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$

ここで，世界 (i) から (iv) は，それぞれ $(1) \wedge (2) \to (3)$ についての可能な世界である．例えば，世界 (i) は “理由がある” と “髪を切る” がともに真となり，その結果，“$(1) \wedge (2) \to (3)$” が真となる世界である．

では，我々が見つけようとしていた世界，即ち，カウンターモデルはこの中に存在するだろうか．まず，(1) と (2) が両方ともに真である世界は，世界 (iii) と世界 (iv) である．そして，(1) と (2) がともに真でかつ (3) が偽となる世界は，世界 (iii) である．ここで，我々の探していたカウンターモデルが世界 (iii) であることが分かる．即ち，“理由がある” が偽で “髪を切る” が真となる世界が可能であることが，(議論 A) が成立しない理由として上げられる．

以上のことから，(議論 A) を持ちかけてきた人に対して，次のように主張することができる．

> 「理由がないの髪を切ることは可能だ．つまり，これは，君の前提 (1)，(2) と矛盾しない．よって，君の結論は論理的ではない.」

さて，上の $\{(1), (2), \neg(3)\}$ のように，それらを同時に満たす世界 (モデル) が構成可能である時，それらの論理式は**充足可能**であると言う．言い換えれば，充足可能性とは,「ある世界で真となり得る」ということである [2] ．

[1] 但し，正規化定理を応用して，正規形証明の集合だけに限定して考えれば，$(1) \wedge (2) \to (3)$ の形の (正規形) 証明が構成不可能であることを証明論の観点だけから (意味論を用いずに) 示すことが可能である．

[2] 「充足可能性」は，トートロジー (証明可能性) より弱い概念である．というのは，トートロジーは「すべての世界で真である」という概念であるからである．