論理学入門

金曜（4）15：00–（5）16：45–；21A 教室

1　1 階述語論理の自然演繹

1.1　1 階述語論理の形式的言語

これまで導入してきた 1 階述語論理の記号表現（形式的言語）をまとめておく。

1 階述語論理では一般に以下のような記号（**語彙（vocabulary）**）が用いられる。

- **命題結合子** (propositional connectives): $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$
- **量化記号** (quantifires): （普遍記号）$\forall$、（存在記号）$\exists$
- **個体変項** (individual variables): $x, y, z, \ldots$
- **個体定項** (individual constatns): $a, b, c, d, e, \ldots$
- **n 項述語記号** (n-ary predicate symbols): $P(*_1, \ldots, *_n), Q(*_1, \ldots, *_n), \ldots$

また、補助記号としてカッコやコンマ、ピリオドなども用いる。

日常言語の文に対応する記号表現を論理式と呼ぶ。

1 階述語論理の論理式は以下のように帰納的に定義される。

1. $P(*_1, \ldots, *_n)$ が n 項述語記号で、$t_1, \ldots, t_n$ がそれぞれ個体定項または個体変項のとき、$P(t_1, \ldots, t_n)$ は論理式である。とくにこの形の論理式は**原子論理式、atomic formula** と呼ばれる。
2. A が論理式のとき、$(\neg A)$ も論理式である。
3. A が論理式のとき、$(A \wedge B)$ および $(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$ も論理式である。
4. A が論理式で、x が個体変項のとき、$(\forall x A)$ は論理式である。
5. A が論理式で、x が個体変項のとき、$(\exists x A)$ は論理式である。

たとえば、$U(*_1, *_2, *_3)$ が 3 項述語記号で、$Q(*_1, *_2)$ が 2 項述語記号のとき、以下のような記号列は論理式であることがわかる。

$$((\forall y(\exists x U(a, x, y))) \rightarrow (\forall z(\neg Q(c, z))))$$

また、以下のような記号列は論理式でないこともわかる。

$$P(\forall x) \to \exists \lor R(a)$$

練習問題 1 以下の記号列が論理式であることを確かめてください。ただし、$P(*_1)$ および $R(*_1)$ は *1* 項述語記号、$Q(*_1, *_2)$ は *2* 項述語記号とする。

1. $(\forall x(P(x) \to (\exists y(Q(x,y) \lor (\forall z(\neg R(z)))))))$

2. $(\forall z((\exists y(\forall x Q(x,y))) \to R(z)))$

3. $(\exists x(P(x) \lor (\neg(\exists y Q(a,y) \to (\forall z R(z))))))$

命題論理と同様に、以下のような規約にしたがってカッコは適当に省略することにする。とくに、量化子 $\forall x, \exists x$ は、否定 $\neg$ と同じように扱う。

規約 1 (カッコの省略)

1. 一番外側のカッコは省略してよい。
2. 否定記号 $\neg$ および量化子 $\forall x$ と $\exists x$ は結合が強いものと考え、$(\neg A)$ のカッコ、および $(\forall x A)$ と $(\exists x A)$ のカッコは省略してよい。

たとえば、以下の論理式について、

$$((\forall y(\exists x U(a,x,y))) \to (\forall z(\neg Q(c,z))))$$

カッコを省略すると以下のように書くことができる。

$$\forall y \exists x U(a,x,y) \to \forall z \neg Q(c,z)$$

練習問題 2 以下の論理式のカッコを省略して下さい。

1. $(\forall x(P(x) \to (\exists y(Q(x,y) \lor (\forall z(\neg R(z)))))))$

2. $(\forall z((\exists y(\forall x P(x,y))) \to R(z)))$

3. $(\exists x(P(x) \lor (\neg(\exists y Q(a,b,y) \to (\forall z R(z))))))$

1.2 自由変項と束縛変項

$N(*)$ が「$*$ は自然数である」を表すとして、$=(*_1, *_2)$ は通常の等号つまり「$*_1$ と $*_2$ は等しい」を表すとする。（ここで、$=(*_1, *_2)$ は定義に則った表現であるが、普段われわれが使っているように $*_1 = *_2$ と表してもよいことにする。）

このとき、

$$\exists x(N(x) \land 2 \times x = 16)$$

という論理式は「2 倍すると 16 になる自然数が存在する」ということを表している。

（$\times$ は関数記号と呼ばれ、$2 \times x$ のような記号表現はまだ導入していない記号表現であるが、普段のイメージで理解して欲しい。関数記号は後ほど導入する。）

練習問題 3 以下の論理式を翻訳して下さい。

$$\exists x(N(x) \wedge x \times x = 16)$$

ここで、

$$\exists y(N(y) \wedge 2 \times y = 16)$$

という論理式もやはり $\exists x(N(x) \wedge 2 \times x = 16)$ と同じく「2 倍すると 16 になる自然数が存在する」ということを表している。

以前にも注意したように、（自然な）日常言語表現には、上のような量化記号（$\exists$ や $\forall$）と一緒に用いられる変項に対応するものは通常明示的には現れない。そのような量化記号と一緒に用いられる変項を**束縛変項（bound variable）**と呼ぶ。自然言語表現を論理式に翻訳するときには、束縛変項は x でも y でも、その他どのような変項でも構わない。

さらに以下の論理式について考えてみる。

$$\exists y(N(y) \wedge 2 \times y = z)$$

この論理式は「2 倍すると z になるような自然数が存在する」と翻訳することができる。ここで、上の変項 z は量化記号と一緒に用いられている変項ではなく、自然言語に翻訳したときにも明示的に表現せざるを得ない変項である。このような、自然言語に翻訳したときに明示的に表現せざるを得ないような変項を**自由変項（free variable）**と呼ぶ。

上の論理式を次の論理式と比較してみると、

$$\exists y(N(y) \wedge 2 \times y = x)$$

この論理式は「2 倍すると x になるような自然数が存在する」ことを表し、x と z は一般には同じものを表しているとは言えないため、上の論理式 $\exists y(N(y) \wedge 2 \times y = z)$ とは異なることを表現している論理式であると考えられる。

ここで単純に、変項が量化記号と一緒に用いられるかそうでないか、によって束縛変項と自由変項を区別することはできない。以下のような論理式について考えてみると、

$$\exists x P(x) \wedge Q(x)$$

この論理式は「P であるようなものが存在し、なおかつ x は Q である」ということを表しているが、この x は束縛変項だろうか、自由変項だろうか？この論理式は、$\exists x P(x)$ という論理式と、$Q(x)$ という論理式を論理結合子 $\wedge$ で結合してできており、前の方の $\exists x$ の x と、後ろの方の $Q(x)$ の x とは関係がないものと考えられる。それに対して

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

という論理式は、$P(x) \wedge Q(x)$ という論理式に対して量化子 $\exists x$ をくっつけてできており、この両方の x は $\exists x$ の x と関係付けられている。

一般に、$\forall x A$ または $\exists x A$ という形の論理式において、A の部分を量化子 $\forall x$ または $\exists x$ の**スコープ（scope）**と呼ぶ。$\exists x P(x) \wedge Q(x)$ の $\exists x$ のスコープは $P(x)$ であり、また $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ の $\exists x$ のスコープは $P(x) \wedge Q(x)$ である。

個体変項 x が量化子 $\forall x$（もしくは $\exists x$）のスコープに現れているとき、その x は量化子 $\forall x$（もしくは $\exists x$）によって**束縛されている**といい、そのような個体変項を**束縛変項**と呼ぶ。また、束縛変項でない個体変項を**自由変項**と呼ぶ。

したがって $\exists xP(x) \wedge Q(x)$ においては、前の方の x は束縛変項であるが、後ろの方の x は自由変項であるということになる。

例 1 どの変項がどの量化子によって束縛されているか、ということを表す「束縛関係」は下のような図で表すことができる。

$$\exists y\ \overbrace{((\forall x\ \overbrace{(x = y)}^{\text{scope of }\forall x})\wedge(y = x))}^{\text{scope of }\exists y}$$

$x = y$ の x は $\forall x$ によって束縛されている。同様に、$x = y$ の y と $y = x$ の y は $\exists y$ によって束縛されている。$y = x$ の x は自由。

練習問題 4 以下の論理式の束縛関係を図で表してください。

1. $(\forall x(P(x) \rightarrow (\exists y(Q(x, y) \vee (\forall z(\neg R(z)))))))$
2. $(\forall z((\exists y(\forall xP(x, y))) \rightarrow R(z)))$
3. $(\exists x(P(x) \vee (\neg(\exists yQ(a, b, y) \rightarrow (\forall zR(z))))))$

例 2 以下のような論理式では、x は $\forall x$ によって束縛されており、$\exists x$ によっては束縛されていない。

$$\exists x(\forall x(x = y))$$

このような論理式はまぎらわしいので、できる限り束縛変項を別のものに書き換えて $\exists yP(y) \wedge Q(x)$ などと表すことにする。（束縛変項は x でも y でもなんでもよいということは前に見たとおり。）ただし、束縛変項を書き換える際には、**束縛関係を保ったまま書き換えなければならない**。

1. 束縛変項 y を z で置き換えたとき：

$$\exists y\ (\forall xP(x, y) \wedge Q(y, x)) \qquad = \qquad \exists z\ (\forall xP(x, z) \wedge Q(z, x))$$

2. 束縛変項 y, x を共に z で置き換えたとき；

$$\exists y\ (\forall xP(x, y) \wedge Q(y, x)) \qquad \neq \qquad \exists z\ (\forall zP(z, z) \wedge Q(z, x))$$

3. 束縛変項 x を w で置き換え，y を x で置き換えたとき；

$$\exists y\ (\forall x P(x,y) \wedge Q(y,x)) \qquad \neq \qquad \exists x\ (\forall w P(w,x) \wedge Q(x,x))$$

Remark 1 「誰もが誰かを愛している。」を翻訳すると、

$$\forall x \exists y Love(x,y)$$

となる。ここで、x と y を以下のように入れ替えて見ると、

$$\forall y \exists x Love(y,x)$$

これでもやはり意味は同じである。が、次のようにすると

$$\forall y \exists x Love(x,y)$$

この論理式に対応する日常文は「どの人も誰かから愛されている。」という文であり、これは元の文とは意味が違ってしまう。

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] A \arrow[r] & A \\ B \arrow[ur] & B \\ C \arrow[r] & C \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd}[row sep=tiny] A \arrow[r] \arrow[dr] & A \\ B & B \\ C \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

状況 *1* 　　　　状況 *2*

- 状況 *1* では、$\forall x \exists y Love(x,y)$「誰もが誰かを愛している」は真だが、$\forall y \exists x Love(x,y)$「どの人も誰かから愛されている」は偽である（$B$ は誰にも愛されていない。）
- 状況 *2* では、$\forall x \exists y Love(x,y)$ は偽（B は誰も愛していない。）であり、$\forall y \exists x Love(x,y)$ は真である。

1.3 練習問題

練習問題 5 以下の文を述語論理の論理式に翻訳して下さい。

- 「$*_1$ と $*_2$ は等しい」を $*_1 = *_2$
- 「$*_1$ は $*_2$ よりも大きい」を $*_1 > *_2$ （$<$ も同様。）
- 「$*$ は自然数である」を $N(*)$
- 「$*$ の次の数」を $*'$

1. 0 は自然数である。

$$N(0)$$

2. ある数が自然数ならば、その次の数がひとつだけ存在し、その数もまた自然数である。

   まずは「ひとつだけ」の部分を無視して、記号化すると以下のようになる。

$$\forall x(N(x) \to \exists y(N(y) \land y = x'))$$

   次に一般に「P を満たす x はひとつだけである」という文の記号化を考えてみる。この文は以下のように言い換えることができる。

   - x は P を満たし、
   - もし他にも P を満たすようなものが存在するとすればそれは x と等しい

   よって以下のようになる。

$$P(x) \land \forall y(P(y) \to x = y)$$

   これを上のに合わせると以下のようになる。

$$\forall x(N(x) \to \exists y((N(y) \land y = x') \land \forall z((N(z) \land z = x') \to y = z)))$$

3. x の次の数と y の次の数が等しいならば、x と y も等しい。

$$x' = y' \to x = y$$

4. その次の数が 0 となるような自然数は存在しない。

$$\neg\exists x(N(x) \land x' = 0)$$

5. 最大の自然数は存在しない。

   まずは簡単のために以下の変項 x と y は自然数を表す変項であるとする。すると、以下のように記号化することができる。

$$\neg\exists x\forall y(y \leq x) \quad \text{または} \quad \forall x\exists y(x < y)$$

ここに、まず y が自然数であるという条件を加えると以下のようになる。

$$\neg\exists x\forall y(N(y)\to y\leq x)\quad \text{または}\quad \forall x\exists y(N(y)\land x<y)$$

さらに x が自然数であるという条件を加えることで以下の論理式が得られる。

$$\neg\exists x(N(x)\land\forall y(N(y)\to y\leq x))\quad \text{または}\quad \forall x(N(x)\to\exists y(N(y)\land x<y))$$

6. 「$*$ は P である」を $P(*)$ とする。

前提 1 0 は P である。

$$P(0)$$

前提 2 任意の自然数について、その自然数が P であるとすると、次の自然数も P である。

まずは x が自然数を表す変項であるとする。

$$\forall x(P(x)\to P(x'))$$

ここに x が自然数であるという条件を加えると以下のようになる。

$$\forall x((N(x)\land P(x))\to P(x'))$$

結論 すべての自然数が P である。

$$\forall x(N(x)\to P(x))$$

1.4 述語論理の自然演繹

述語論理の自然演繹は、命題論理の自然演繹を自然に拡張することによって得られる。

これまでに見てきたように、Gentzen によって導入された自然演繹は、以下のような特徴をもっていた。

- 各推論規則は、われわれが普段論理推論をする際に使っている「推論法則・論法」をできうる限り忠実に形式化したものである。
- 各推論規則は、誰もがただちに正しいと認めることのできるほど原始的（単純）な規則として定義されている。
- 各論理結合子（命題論理では $\land,\to,\neg,\lor$）に対して、導入規則（I 規則）と除去規則（E 規則）がそれぞれ定義されている。

  ただし、付加規則として二重否定除去規則（や背理法）が定義されている。

以下の推論規則は命題論理の自然演繹の推論規則と同じ形であるが、ここでは（述語論理の推論規則としては)、**論理式 A や B はすべて述語論理の論理式である**（命題論理の論理式ではない）ことに注意しておく。

$\wedge$ **導入規則（$\wedge I$）** 「A という論理式と B という論理式が導けるときには、$A \wedge B$ という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ B\end{matrix}}{A \wedge B}\ \wedge I$$

$\wedge$ **除去規則（$\wedge E$）** 「$A \wedge B$ という論理式が導けるとき、A という論理式を導いてよい」「$A \wedge B$ という論理式が導けるとき、B という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{A}\ \wedge E1 \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{B}\ \wedge E2$$

$\rightarrow$ **導入規則（$\rightarrow I$）** 「A という仮定から B という論理式が導けるときには、A という開いた仮定を閉じて $A \rightarrow B$ という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^n \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B}\ \rightarrow I, n$$

$\rightarrow$ **除去規則（$\rightarrow E$）** 「$A \rightarrow B$ という論理式と A という論理式を導くことができるときには、B という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \rightarrow B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{B}\ \rightarrow E$$

$\neg$ **導入規則（$\neg I$）** 「A という仮定から矛盾 $\perp$ が導けるときには、A という開いた仮定を閉じて $\neg A$ という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^n \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\neg A}\ \neg I, n$$

$\neg$ **除去規則（$\neg E$）** 「$\neg A$ という論理式と A という論理式を導くことができるときには、矛盾 $\perp$ を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \neg A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{\perp}\ \neg E$$

$\vee$ 導入規則（$\vee I$）　「A という論理式が導けるときには、$A \vee B$ という論理式を導いてよい」「B という論理式が導けるときには、$A \vee B$ という論理式を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}}{A \vee B}\ \vee I1 \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ B\end{array}}{A \vee B}\ \vee I2$$

$\vee$ 除去規則（$\vee E$）　「$A \vee B$ という論理式が導け、また A という仮定からも、B という仮定からも同じ論理式 C が導けるときには、仮定 A および仮定 B を除去して、論理式 C を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ A \vee B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]^n\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]^n\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\ \vee E, n$$

$\bot$ 除去規則（$\bot E$）　「矛盾 $\bot$ という論理式が導けるときには、任意の論理式 A を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \bot\end{array}}{A}\ \bot E$$

$\neg\neg$ 除去規則（$\neg\neg E$）　「$\neg\neg A$ という論理式が導けるときには、論理式 A を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg\neg A\end{array}}{A}\ \neg\neg E$$

背理法（RAA）　「$\neg A$ という仮定から矛盾 $\bot$ が導けるときには、開いた仮定 $\neg A$ を閉じて、論理式 A を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg A]^n\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{A}\ RAA, n$$

（背理法は二重否定除去規則と同等である。）

定義 1 (証明可能性（provability）)

- 上記の推論規則を繰り返し適用することにより得られる木の形をした図式を**証明図（proof figure）**と呼ぶ。
- 証明図の一番下の論理式をその証明図の**結論（conclusion）**という。
- 開いた前提（仮定）$B_1, \ldots, B_n$ から結論 A への証明図が存在するとき、**（前提）$B_1, \ldots, B_n$ から（結論）A が証明可能である（provable）**と言い、下のように表す。

  $$B_1, \ldots, B_n \vdash A$$

  とくに、開いた前提が一つもないときには単に **A は証明可能である**と言い、$\vdash A$ と表す。

上の $\wedge, \to, \neg, \vee$ に関する推論規則に、$\forall$ と $\exists$ の推論規則を加えることにより、述語論理の自然演繹体系が得られる。

1.5　代入

量化子 $\forall x$ と $\exists x$ の推論規則を導入するために、論理式にあらわれる自由変項に対する**代入**という操作について説明しておく。

以下の論理式（「$x+1$ に等しいもの（自然数）が存在する」）では、y は束縛変項であり、x は自由変項である。

$$\exists y(x+1=y)$$

ここで、この自由変項 x に自然数 2（という個体定項）を代入することにより、以下のような論理式が得られる。（「$2+1$ に等しいもの（自然数）が存在する」）

$$\exists y(2+1=y)$$

このように、一般に自由変項には個体定項や個体変項を代入することができる。

一般に、論理式 A は複数の自由変項を含んでいる。A が自由変項 x を含んでいる（ひとつとは限らないし、ゼロ個の場合もあり得る）ということを以下のように表す。

$$A(x)$$

（上の表記は、A が x しか自由変項として含んでいない、ということではない。x 以外の他の自由変項や束縛変項を含んでいるかもしれないが、とくにいま x という自由変項に注目しているということを表している。）
また、t が個体定項または個体変項のとき、$A(x)$ の自由変項 x に t を代入して得られる論理式を以下のように表す。

$$A[x:=t] \quad \text{または} \quad A[t/x]$$

上の例では、$A(x)$ とは $\exists y(x+1=y)$ という論理式を表し（y は束縛変項！）、$A[x:=2]$ は $\exists y(2+1=y)$ という論理式を表している。

また、たとえば $A(x)$ が $\exists y(x+x=y)$ という論理式を表しているときには、$A[x:=2]$ は $\exists y(2+2=y)$ という論理式を表している。

さらに、一般に論理式 A には x という自由変項以外にも、z や w など、他の自由変項を含んでいることもあり、それらにも注目したいようなときには、以下のように表す。

$$A(x,z,w)$$

たとえば、$A(x,z)$ という表記によって、$\exists y(x+z=y)$ という自由変項 x と z を含んでいる論理式を表現することができる。

ここで、論理式の自由変項に、自然数 2 などの個体定項を代入する場合はなんの問題もないが、x や z などの個体変項を代入する場合には少し注意が必要である。たとえば、

$$\exists y(x+1=y)$$

という論理式の x に個体定項（自然数）2 を代入するような場合は、上で見たようになんの問題もない。また x に別の個体変項 z を代入する場合も以下のようにとくに問題はない。

$$\exists y(z+1=y)$$

ところが、上の論理式において束縛変項となっている個体変項 y を x に代入してしまうと、以下のような（自然数について考えれば）おかしな論理式が得られてしまう。

$$\exists y(y+1=y)$$

このように、**論理式に束縛変項としてあらわれている個体変項を自由変項に対して代入することは許されない**ことに注意しなければならない。別の言い方をすれば、**代入したときに束縛変項になってしまうような代入は許されない**ということである。（もしくは、**束縛関係が変わってしまうような代入は許されない**ということである。）

1.6　∀ 除去規則（$\forall E$）

まずは普遍量化子 $\forall x$ の除去規則についてみていく。この規則は、一般的にすべてのものに対して成り立つことから、具体的例を挙げるような規則である。

前提　すべてのものはいつか死ぬ（壊れる）。

結論　タロウはいつか死ぬ（壊れる）。

この推論を記号化すると、「$*$ はいつか死ぬ」を $P(*)$ と表し、「タロウ」を a として、以下のように表すことができる。

$$\frac{\forall x P(x)}{P(a)}$$

このような推論を一般化したものが ∀ 除去規則である。

∀ 除去規則（$\forall E$ と略記する）　$\begin{matrix}\vdots \\ \forall x A\end{matrix}$（論理式 $\forall x A$ が導ける）が成り立つときには、任意の個体定項または個体変項 t について、以下のようにして論理式 $A[x:=t]$ を導いてよい。

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \forall x A\end{matrix}}{A[x:=t]}\ \forall E$$

ただし、t が個体変項のときは、それが $A[x:=t]$ において束縛変項となってはならない。

ここで、論理式 $\forall x A$ の変項 x は束縛変項であるが、量化子 $\forall x$ を除去して得られる論理式 A では、x は自由変項となっている（$A(x)$ と表される）ことに注意。$\forall E$ 規則をもっと細かく分解すると、以下のような 2 つの操作からなっていると考えることもできる。

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \forall x A \\ A(x) \\ A[x := t] \end{array}$$

また A の自由変項 x に t を代入して論理式 $A[x := t]$ を得るとき、とくに変項を代入するときには、**代入した変項が** $A[x := t]$ **において束縛変項とならない**ように注意しなければならない。

例 3 ($\forall E$) x, y が自然数を値とする変項であるとき、以下のように $\forall E$ 規則を適用することができる。

$$\frac{\forall x \exists y (x < y)}{\exists y (x < y)} \; \forall E$$

しかし、以下のような $\forall E$ の適用は許されない。

$$\frac{\forall x \exists y (x < y)}{\exists y (y < y)} \; \forall E \times$$

前提となっている論理式は「どんな自然数にも、それより大きな自然数が存在する」ことを意味していて明らかに真であるが、間違った $\forall E$ 規則を適用して得られた論理式は明らかに偽である。

練習問題 6 以下を示してください。

1. $\forall x (P(x) \to (Q(x) \land R(x)))$, $P(d) \vdash Q(d)$

2. $P(d)$, $\forall x (P(x) \to (P(x) \to Q(x))) \vdash Q(d)$

3. $\forall x (P(x) \to Q(x))$, $\forall x (P(x) \to R(x))$, $P(d) \vdash Q(d) \land R(d)$

4. $\forall x (P(x) \land (Q(x) \to R(x)))$, $\forall x (P(x) \to Q(x)) \vdash R(d)$

5. $\forall x (P(x) \to Q(x))$, $\neg Q(c) \vdash \neg P(c)$

6. $\forall x \forall y (P(x) \land (P(y) \to Q(y)) \vdash Q(d)$

1.7　∀導入規則（$\forall I$ 規則）

普遍量化子 $\forall x$ の導入規則は、あるものについて成り立つことを一般化して、それをすべてのものについて主張する規則である。このような一般化に関する規則は、いつでも適用できるわけではなく、注意が必要である。$\forall I$ 規則は以下のような推論規則である。

∀導入規則（$\forall I$ と略記する）　$\begin{array}{c}\vdots\\ A(x)\end{array}$（論理式 $A(x)$ が導ける）が成り立ち、以下の条件を満たすとする。

条件： $A(x)$ に至る証明の開いた前提には x が自由変項としてあらわれていない。

このとき以下のようにして論理式 $\forall xA$ を導いてよい。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A(x)\end{array}}{\forall xA}\ \forall I$$

上のような条件を**変項条件**と呼ぶ。

この推論規則を用いて以下のような推論を行うことができる。

例 4　「$*$ は授業に出席する」を $P(*)$、「$*$ は演習を行う」を $Q(*)$、「$*$ は成績 A をもらう」を $R(*)$ とする。

前提 1　授業に出席するものはみな演習を行う。$\forall x(P(x) \to Q(x))$

前提 2　演習を行うものはみな成績 A をもらう。$\forall x(Q(x) \to R(x))$

結論　授業に出席するものはみな成績 A をもらう。$\forall x(P(x) \to R(x))$

1. 結論を導くために、まず誰かは限定しない不特定な個人 x さんについて、「x さんが授業に出席している」と（暫定的に）仮定する。

$$P(x)$$

2. 前提 1 からこの x さんについて、「x さんは演習を行っている」と結論することができる。

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(P(x) \to Q(x))}{P(x) \to Q(x)}\ \forall E \qquad P(x)}{Q(x)}\ \to E$$

3. さらに前提 2 からこの x さんについて、「x さんは成績 A をもらえる」と結論することができる。

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Q(x) \to R(x))}{Q(x) \to R(x)}\ \forall E \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(P(x) \to Q(x))}{P(x) \to Q(x)}\ \forall E \qquad P(x)}{Q(x)}\ \to E}{R(x)}\ \to E$$

4. したがって、「x さんが授業に出席している」という仮定なしに（仮定を閉じて）、「x さんが授業に出席しているならば、その x さんは成績 A をもらえる」と結論することができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Q(x)\to R(x))}{Q(x)\to R(x)}\ \forall E \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(P(x)\to Q(x))}{P(x)\to Q(x)}\ \forall E \qquad [\ P(x)\ ]^1}{Q(x)}\ \to E}{R(x)}\ \to E}{P(x)\to R(x)}\ \to I,1$$

5. ここで、「x さんが授業に出席しているならば、その x さんは成績 A をもらえる」という結論は、特定の個人 x さんの性質には何も依存していない。つまり、このことは x さんではなくても誰についても成り立つ結論となっている。したがって $\forall$ 導入規則を用いて「授業に出席するものはみな成績 A をもらえる」と結論することができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Q(x)\to R(x))}{Q(x)\to R(x)}\ \forall E \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(P(x)\to Q(x))}{P(x)\to Q(x)}\ \forall E \qquad [\ P(x)\ ]^1}{Q(x)}\ \to E}{R(x)}\ \to E}{P(x)\to R(x)}\ \to I,1}{\forall x(P(x)\to R(x))}\ \forall I$$

ここで、3 のすぐ直後に $\forall I$ 規則を適用することはできない。

$$\begin{array}{c} P(x) \\ \vdots \\ \dfrac{R(x)}{\forall x R(x)}\ \forall I \times \end{array}$$

$R(x)$ という論理式に $\forall I$ 規則を適用して $\forall x R(x)$ という論理式を結論する際に、$R(x)$ に至る証明図では $P(x)$ **は開いた前提**であり、そこに x が自由変項としてあらわれているため、**変項条件が満たされていない。**

この後に $\to I$ 規則を適用すると以下のようなおかしな結論が得られてしまう。

$$\begin{array}{c} [P(x)]^1 \\ \vdots \\ \dfrac{\dfrac{R(x)}{\forall x R(x)}\ \forall I \times}{P(x)\to \forall x R(x)}\ \to I,1 \end{array}$$

この結論は「x が授業に出ているならば、（その他の）全員が A をもらう。」つまり「誰だか分からないが誰かある人（x）が（1 人でも）授業に出ていれば、（その他の）全員が A をもらえる」というおかしなことを意味する結論となっている。変項条件はこのような推論を防ぐためのものである。

すなわち、「x さんが成績 A をもらえる」という結論（$R(x)$）は、あくまで「その x さんが授業に出ている」という仮定のもとで成り立つことであって、その仮定を無視して x さんに限らず「全員が成績 A をもらえる」と結論することはできないのである。（$P(x) \to R(x)$ という結論は特定の x さんには依存していない結論であることに注意。）

例 5 自然数に関する推論で、以下のように $\forall I$ 規則を間違って適用すると、「すべての自然数は *0* に等しい」などというおかしな結論が得られてしまう。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x=0]^1}{\forall x(x=0)}\;\forall I\times}{x=0\to\forall x(x=0)}\;1}{\forall y(y=0\to\forall x(x=0))}\;\forall I\bigcirc}{0=0\to\forall x(x=0)}$$

例 6 ($\forall I$) $\forall x(P(x)\land Q(x)) \vdash \forall xP(x)\land\forall xQ(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(P(x)\land Q(x))}{P(x)\land Q(x)}\;\forall E}{P(x)}\;\land E}{\forall xP(x)}\;\forall I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(P(x)\land Q(x))}{P(x)\land Q(x)}\;\forall E}{Q(x)}\;\land E}{\forall xQ(x)}\;\forall I}{\forall xP(x)\land\forall xQ(x)}\;\land I$$

練習問題 7 以下を示してください。

1. $\forall x\forall yP(x,y)\vdash\forall y\forall xP(x,y)$
2. $\forall x(P(x)\to Q(x))$, $\forall x(Q(x)\to R(x))\vdash\forall x(P(x)\to R(x))$
3. $\forall xP(x)\vdash\forall x\neg\neg P(x)$
4. $\forall x((P(x)\land Q(x))\to R(x))\vdash\forall x(P(x)\to(Q(x)\to R(x))$
5. $\vdash\forall x(\neg P(x)\to(P(x)\to Q(x)))$
6. $\forall x(P(x)\to Q(x))$, $\forall x(Q(x)\to R(x))\vdash\forall x((P(x)\lor Q(x))\to R(x))$
7. $\forall x(P(x)\to Q(x))\vdash\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$
8. $\forall x(P(x)\land Q(x))\vdash\forall xP(x)\land\forall xQ(x)$
9. $\forall xP(x)\land\forall xQ(x)\vdash\forall x(P(x)\land Q(x))$
10. $\forall xP(x)\lor\forall xQ(x)\vdash\forall x(P(x)\lor Q(x))$ （逆は成り立たない。）
11. $\forall x(P(x)\to Q(x))\vdash\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$ （逆は成り立たない。）
12. $A\land\forall xP(x)\vdash\forall x(A\land P(x))$
    （ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。

13. $\forall x(A \land P(x)) \vdash A \land \forall x P(x)$

（ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。

14. $A \lor \forall x P(x) \vdash \forall x(A \lor P(x))$

（ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。

15. $\forall x(A \lor P(x)) \vdash A \lor \forall x P(x)$

（ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。

16. $A \to \forall x P(x) \vdash \forall x(A \to P(x))$

（ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。

17. $\forall x(A \to P(x)) \vdash A \to \forall x P(x)$

（ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。

1.8　∃ 導入規則（$\exists I$ 規則）

存在量化子 $\exists x$ の導入規則は、具体的な対象（たとえば自然数 2 やタロウという個人など）について成り立つことを抽象化（一般化）して、それが成り立つような何かが存在することを主張する規則である。たとえば以下のような推論である。

前提 3 は 2 より大きい自然数である。

結論 2 より大きい自然数が存在する。

上の推論の前提は具体的な自然数 3 に関する主張であり、結論はそれを抽象化した（具体的な自然数には言及しない）主張である。

この推論を記号化すると、「$*$ は 2 より大きい自然数である」を $P(*)$ と表し、「3」を a として、以下のように表すことができる。

$$\frac{P(a)}{\exists x P(x)}$$

このような推論を一般化したものが ∃ 導入規則である。

∃ 導入規則（$\exists I$ と略記する）　$\begin{matrix}\vdots \\ A[x := t]\end{matrix}$（論理式 $A[x := t]$ が導ける）が成り立つときには、以下のようにして論理式 $\exists x A$ を導いてよい。

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A[x := t]\end{matrix}}{\exists x A}\ \exists I$$

例 7

前提 誰もが誰かを愛している。$\forall x \exists y L(x,y)$

結論 誰かが誰かを愛している。$\exists x \exists y L(x,y)$

$$\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y L(x,y)}{\exists y L(a,y)}\ \forall E}{\exists x \exists y L(x,y)}\ \exists I$$

例 8 $\neg \forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\neg \forall x P(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg \exists x \neg P(x)]^1 \qquad \dfrac{[\neg P(x)]^2}{\exists x \neg P(x)}\ \exists I}{\bot}\ \bot E}{P(x)}\ RAA, 2}{\forall x P(x)}\ \forall I}{\bot}\ \bot E}{\exists x \neg P(x)}\ RAA, 1$$

Remark 2 $\exists I$ 規則で、$\exists$ によって束縛される x はすべての x でなくともよい。例えば以下のような推論が可能である。

$$\dfrac{\dfrac{\forall z(z=z)}{z=z}}{\exists x(z=x)}\ \exists I$$

（二段目の論理式 $z=z$ は $z=x[z/x]$ という論理式と見なされている。）

練習問題 8 以下を示してください。

1. $\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$
2. $\forall x(P(x) \wedge (Q(x) \wedge R(x)))$, $\forall x(Q(x) \to S(x)) \vdash \exists x(R(x) \wedge S(x))$
3. $\forall x(P(x) \wedge (P(x) \to Q(x))) \vdash \exists Q(x)$
4. $\forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge R(x))$, $\forall x(P(x) \to S(x))$, $\forall x P(x) \vdash \exists x((Q(x) \wedge R(x)) \wedge S(x))$
5. $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \vdash \exists x \exists y(P(x) \wedge Q(y))$

1.9　$\exists$ 除去規則（$\exists E$ 規則）

存在量化子 $\exists x$ の除去規則は、あるものが存在することから、そのものにとりあえず適当な名前をつけて推論を進め、一般的な結論を導く推論法則である。

∃除去規則（$\exists E$ と略記する） $\begin{array}{c}\vdots\\ \exists x A\end{array}$（論理式 $\exists x A$ が導ける）が成り立ち、また $\begin{array}{c}A[x:=t]\\ \vdots\\ C\end{array}$（$A[x := t]$ という仮定から C が導ける）が成り立つとする。さらに以下の条件が満たされるとする。

（条件 1） C には、x は自由変項としてあらわれていない。

（条件 2） x が $A[x := t]$ 以外の開いた前提において自由変項としてあらわれていない。

このとき $A[x := t]$ という仮定なしに（仮定を閉じて）、論理式 C を結論してよい。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \exists x A\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\ A[x := t]\ ]^n\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\ \exists E, n$$

例 9

前提 1 数学者が存在する。$\exists x P(x)$

前提 2 すべての数学者は変人である。$\forall x(P(x) \to R(x))$

結論 変人が存在する。$\exists R(x)$

1. 前提 1 で存在するもの（人）は、どういうものかは分からないが、**とりあえず適当に a さんと名付ける。**

$$P(a)$$

ここで、**この a さんは誰か特定のものであってはならない。** たとえば特定の個人「ゲーデル」をとって、（ゲーデルはユダヤ人ではないが、自身がユダヤ人であると信じ込み、毒殺を恐れて食事をせずに餓死したといわれている）ゲーデルが変人だから、という理由で「変人が存在する」と結論することはできない。そうすると、この結論はゲーデルという特定の個人の性質に依存した結論となってしまうからである。

とりあえず名前を付けた a さんは、不特定の個人でなければならない。

2. 前提 2 はすべての数学者は変人であると述べているので、とくに a さんについても、「a さんが数学者ならば a さんは変人である」ことが分かる。

$$\dfrac{\forall x(P(x) \to R(x))}{P(a) \to R(a)}\ \forall E$$

3. 上の 1 とあわせて、「a さんは変人である」ことが分かる。

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(P(x) \to R(x))}{P(a) \to R(a)}\ \forall E \qquad P(a)}{R(a)}\ \boxed{\to E}$$

4. よって「変人が存在する」と結論することができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(P(x)\to R(x))}{P(a)\to R(a)}\,\forall E \qquad P(a)}{R(a)}\,\to E}{\exists xR(x)}\,\boxed{\exists I}$$

5. このようにして得られた結論 $\exists xR(x)$ は、a さん個人に関する主張ではなく、a さんに限らず一般的に「変人が存在する」という主張となっている。すなわち、ある不特定の個人 a さんに関する「a さんが数学者である（$P(a)$）」という仮定から、a さんに固有の性質などに訴えることなく、a さんに限らない一般的な主張（$\exists xR(x)$）を導くことができたのである。

   このようなときに、「a さんが哲学者である（$P(a)$）」という仮定を用いずに（閉じて）、それを抽象化した「誰か分からないが哲学者が存在する（$\exists xP(x)$）」という仮定を用いて、$\exists E$ 規則を適用して以下のように結論することができる。

$$\dfrac{\exists xP(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(P(x)\to R(x))}{P(a)\to R(a)}\,\forall E \qquad [\ P(a)\ ]^1}{R(a)}\,\to E}{\exists xR(x)}\,\exists I}{\exists xR(x)}\,\boxed{\exists E,1}$$

- 3 の後すぐに $\exists E$ を適用することはできない。（**変項条件 1**）

$$\dfrac{\exists xP(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(P(x)\to R(x))}{P(a)\to R(a)}\,\forall E \qquad P(a)}{R(a)}\,\to E}{R(a)}\,\exists E\times$$

  この結論 $R(a)$ は「a さんが変人である」という a さんに関する主張であって、一般的な結論ではない。このようなときには $\exists E$ 規則を適用することはできない。

まとめると、$\exists$ 除去規則は以下のように用いられる。

(i) あるものが存在することが分かっているとする。$\exists xP(x)$

(ii) そのあるものにとりあえず名前をつける。$P(a)$

(iii) 不特定の個体 a に関する仮定 $P(a)$ から、a に限らない一般的な結論 C を導く。

(iv) a に関する仮定 $P(a)$ を用いることなく（仮定を閉じて）その一般的な結論 C を結論することができる。

例 10 $\forall x\neg P(x)\vdash\neg\exists xP(x)$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists xP(x)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x\neg P(x)}{\neg P(a)}\,\forall E \qquad [P(a)]^1}{\bot}\,\neg E}{\bot}\,\exists E,1}{\neg\exists xP(x)}\,\neg I,2$$

練習問題 9

1. $\exists x \exists y P(x,y) \vdash \exists y \exists x P(x,y)$
2. $\forall x(A(x) \to B(x)) \vdash \exists A(x) \to \exists B(x)$
3. $\exists x P(x) \lor \exists x Q(x) \vdash \exists x(P(x) \lor Q(x))$
4. $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \vdash \exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$
5. $\exists x(P(x) \land Q(x)) \vdash \exists x P(x) \land \exists x Q(x)$ （逆は成り立たない。）
6. $\exists x P(x) \to A \vdash \forall x(P(x) \to A)$
   （ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。）
7. $\forall x(P(x) \to A) \vdash \exists x P(x) \to A$
   （ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。）
8. $\exists x(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$
9. $\forall x P(x) \to \exists x Q(x) \vdash \exists x(P(x) \to Q(x))$
10. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$
11. $\neg \forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$
12. $\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$
13. $\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$
14. $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$

1.10 述語論理の自然演繹：推論規則のまとめ

$\wedge$ 導入規則（$\wedge I$）　「A という論理式と B という論理式が導けるときには、$A \wedge B$ という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}\ \wedge I$$

$\wedge$ 除去規則（$\wedge E$）　「$A \wedge B$ という論理式が導けるとき、A という論理式を導いてよい」「$A \wedge B$ という論理式が導けるとき、B という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{A}\ \wedge E1 \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{B}\ \wedge E2$$

$\to$ 導入規則（$\to I$）　「A という仮定から B という論理式が導けるときには、A という開いた仮定を閉じて $A \to B$ という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^n \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ \to I, n$$

$\to$ 除去規則（$\to E$）　「$A \to B$ という論理式と A という論理式を導くことができるときには、B という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ A \to B & A\end{matrix}}{B}\ \to E$$

$\neg$ 導入規則（$\neg I$）　「A という仮定から矛盾 $\perp$ が導けるときには、A という開いた仮定を閉じて $\neg A$ という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^n \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\neg A}\ \neg I, n$$

$\neg$ 除去規則（$\neg E$）　「$\neg A$ という論理式と A という論理式を導くことができるときには、矛盾 $\perp$ を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ \neg A & A\end{matrix}}{\perp}\ \neg E$$

$\vee$ 導入規則（$\vee I$）　「A という論理式が導けるときには、$A \vee B$ という論理式を導いてよい」「B という論理式が導けるときには、$A \vee B$ という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{A \vee B}\ \vee I1 \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ B\end{matrix}}{A \vee B}\ \vee I2$$

∨ 除去規則（$\vee E$）　「$A \vee B$ という論理式が導け、また A という仮定からも、B という仮定からも同じ論理式 C が導けるときには、仮定 A および仮定 B を除去して、論理式 C を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ A \vee B \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [A]^n \\ \vdots \\ C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [B]^n \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C} \ \vee E, n$$

∀ 導入規則（$\forall I$）　「以下の条件のもとで $A(x)$ という論理式が導けたとする。

（条件）　$A(x)$ に至る証明の開いた前提には x が自由変項としてあらわれていない。

このとき論理式 $\forall x A$ を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ A(x) \end{matrix}}{\forall x A} \ \forall I$$

∀ 除去規則（$\forall E$）　「$\forall x A$ という論理式が導けるときには、任意の個体定項または個体変項 t について、論理式 $A[x := t]$ を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ \forall x A \end{matrix}}{A[x := t]} \ \forall E$$

（x に個体変項 y を代入する際には、代入した y が $A[x := y]$ において束縛変項とならないように注意しなければならない。）

∃ 導入規則（$\exists I$）　「論理式 $A[x := t]$ が導けるときには、論理式 $\exists x A$ を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ A[x := t] \end{matrix}}{\exists x A} \ \exists I$$

∃ 除去規則（$\exists E$）　論理式 $\exists x A$ が導け、$A[x := t]$ という仮定から C が導けるとする。さらに以下の条件が満たされるとする。

（条件 1）　C には、x は自由変項としてあらわれていない。

（条件 2）　x が $A[x := t]$ 以外の開いた前提において自由変項としてあらわれていない。

このとき $A[x := t]$ という仮定なしに（仮定を閉じて）、論理式 C を結論してよい。

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ \exists x A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [\ A[x := t]\ ]^n \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C} \ \exists E, n$$

$\perp$ **除去規則（$\perp E$）**　「矛盾 $\perp$ という論理式が導けるときには、任意の論理式 A を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \perp\end{array}}{A}\ \perp E$$

$\neg\neg$ **除去規則（$\neg\neg E$）**　「$\neg\neg A$ という論理式が導けるときには、論理式 A を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg\neg A\end{array}}{A}\ \neg\neg E$$

背理法（RAA）　「$\neg A$ という仮定から矛盾 $\perp$ が導けるときには、開いた仮定 $\neg A$ を閉じて、論理式 A を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^n\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{A}\ RAA, n$$

（背理法は二重否定除去規則と同等である。）