

論理学入門

金曜 (4) 15:00–; 321 教室 (5) 16:45–; 321 教室

<http://abelard.flet.keio.ac.jp/person/takemura/class2.html>

1 1 階述語論理の自然演繹

1.1 1 階述語論理の形式的言語

これまで導入してきた 1 階述語論理の記号表現 (形式的言語) をまとめておく。

1 階述語論理では一般に以下のような記号 (語彙 (vocabulary)) が用いられる。

- 命題結合子 (propositional connectives): $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$
- 量化記号 (quantifiers): (普遍記号) \forall 、(存在記号) \exists
- 個体変項 (individual variables): x, y, z, \dots
- 個体定項 (individual constants): a, b, c, d, e, \dots
- n 項述語記号 (n -ary predicate symbols): $P(*_1, \dots, *_n), Q(*_1, \dots, *_n), \dots$

また、補助記号としてカッコやコンマ、ピリオドなども用いる。

日常言語の文に対応する記号表現を論理式と呼ぶ。

1 階述語論理の論理式は以下のように帰納的に定義される。

1. $P(*_1, \dots, *_n)$ が n 項述語記号で、 t_1, \dots, t_n がそれぞれ個体定項または個体変項のとき、 $P(t_1, \dots, t_n)$ は論理式である。とくにこの形の論理式は原子論理式、atomic formula と呼ばれる。
2. A が論理式のとき、 $(\neg A)$ も論理式である。
3. A が論理式のとき、 $(A \wedge B)$ および $(A \vee B)$ 、 $(A \rightarrow B)$ も論理式である。
4. A が論理式で、 x が個体変項のとき、 $(\forall x A)$ は論理式である。
5. A が論理式で、 x が個体変項のとき、 $(\exists x A)$ は論理式である。

たとえば、 $U(*_1, *_2, *_3)$ が 3 項述語記号で、 $Q(*_1, *_2)$ が 2 項述語記号のとき、以下のような記号列は論理式であることがわかる。

$$((\forall y(\exists x U(a, x, y))) \rightarrow (\forall z(\neg Q(c, z))))$$

また、以下のような記号列は論理式でないこともわかる。

$$U(\exists x Q(x)) \rightarrow \forall Q(a)$$

練習問題 1 以下の記号列が論理式であることを確かめてください。ただし、 $P(*_1)$ および $R(*_1)$ は 1 項述語記号、 $Q(*_1, *_2)$ は 2 項述語記号とする。

1. $(\forall x(P(x) \rightarrow (\exists y(Q(x, y) \vee (\forall z(\neg R(z)))))$
2. $(\forall z((\exists y(\forall x Q(x, y))) \rightarrow R(z)))$
3. $(\exists x(P(x) \vee (\neg(\exists y Q(a, y) \rightarrow (\forall z R(z)))))$

命題論理と同様に、以下のような規約にしたがってカッコは適当に省略することにする。とくに、量化子 $\forall x, \exists x$ は、否定 \neg と同じように扱う。

規約 1 (カッコの省略)

1. 一番外側のカッコは省略してよい。
2. 否定記号 \neg および量化子 $\forall x$ と $\exists x$ は結合が強いものと考え、 $(\neg A)$ のカッコ、および $(\forall x A)$ と $(\exists x A)$ のカッコは省略してよい。

たとえば、以下の論理式について、

$$((\forall y(\exists x U(a, x, y))) \rightarrow (\forall z(\neg Q(c, z))))$$

カッコを省略すると以下のように書くことができる。

$$\forall y \exists x U(a, x, y) \rightarrow \forall z \neg Q(c, z)$$

練習問題 2 以下の論理式のカッコを省略して下さい。

1. $(\forall x(P(x) \rightarrow (\exists y(Q(x, y) \vee (\forall z(\neg R(z)))))$
2. $(\forall z((\exists y(\forall x P(x, y))) \rightarrow R(z)))$
3. $(\exists x(P(x) \vee (\neg(\exists y Q(a, b, y) \rightarrow (\forall z R(z)))))$

1.2 自由変項と束縛変項

$N(*)$ が「 $*$ は自然数である」を表すとして、 $=(*_1, *_2)$ は通常の等号つまり「 $*_1$ と $*_2$ は等しい」を表すとする。(ここで、 $=(*_1, *_2)$ は定義に則った表現であるが、普段われわれが使っているように $*_1 = *_2$ と表してもよいことにする。)

このとき、

$$\exists x(N(x) \wedge (2 \times x = 16))$$

という論理式は「2 倍すると 16 になる自然数が存在する」ということを表している。

(\times は関数記号と呼ばれ、 $2 \times x$ のような記号表現はまだ導入していない記号表現であるが、普段のイメージで理解して欲しい。関数記号は後ほど導入する。)

練習問題 3 以下の論理式を翻訳して下さい。

$$\exists x(N(x) \wedge (x \times x = 16))$$

ここで、

$$\exists y(N(y) \wedge (2 \times y = 16))$$

という論理式もやはり $\exists x(N(x) \wedge (2 \times x = 16))$ と同じく「2 倍すると 16 になる自然数が存在する」ということを表している。

以前にも注意したように、(自然な)日常言語表現には、上のような量化記号(\exists や \forall)と一緒に用いられる変項に対応するものは通常明示的には現れない。そのような量化記号と一緒に用いられる変項を束縛変項 (bound variable) と呼ぶ。自然言語表現を論理式に翻訳するときには、束縛変項は x でも y でも、その他どのような変項でも構わない。

さらに以下の論理式について考えてみる。

$$\exists y(N(y) \wedge (2 \times y = z))$$

この論理式は「2 倍すると z になるような自然数が存在する」と翻訳することができる。ここで、上の変項 z は量化記号と一緒に用いられている変項ではなく、自然言語に翻訳したときにも明示的に表現せざるを得ない変項である。このような変項を自由変項 (free variable) と呼ぶ。

上の論理式を次の論理式と比較してみると、

$$\exists y(N(y) \wedge (2 \times y = x))$$

この論理式は「2 倍すると x になるような自然数が存在する」ことを表し、 x と z は一般には同じものを表しているとは言えないため、上の論理式 $\exists y(N(y) \wedge (2 \times y = z))$ とは異なることを表現している論理式であると考えられる。

ここで単純に、変項が量化記号と一緒に用いられるかそうでないか、によって束縛変項と自由変項を区別することはできない。以下のような論理式について考えてみると、

$$\exists x P(x) \wedge Q(x)$$

この論理式は「 P であるようなものが存在し、なおかつ x は Q である」ということを表しているが、この x は束縛変項だろうか、自由変項だろうか？この論理式は、 $\exists x P(x)$ という論理式と、 $Q(x)$ という論理式を論理結合子 \wedge で結合してできており、前の方の $\exists x$ の x と、後ろの方の $Q(x)$ の x とは関係がないものと考えられる。それに対して

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

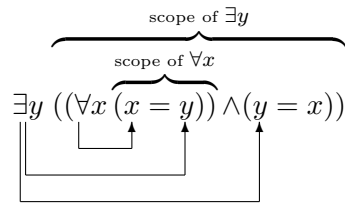
という論理式は、 $P(x) \wedge Q(x)$ という論理式に対して量子子 $\exists x$ をくっつけてできており、この両方の x は $\exists x$ の x と関係付けられている。

一般に、 $\forall x A$ または $\exists x A$ という形の論理式において、 A の部分を量子子 $\forall x$ または $\exists x$ のスコープ (scope) と呼ぶ。 $\exists x P(x) \wedge Q(x)$ の $\exists x$ のスコープは $P(x)$ であり、また $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ の $\exists x$ のスコープは $P(x) \wedge Q(x)$ である。

個体変項 x が量子子 $\forall x$ (もしくは $\exists x$) のスコープに現れているとき、その x は量子子 $\forall x$ (もしくは $\exists x$) によって束縛されているといい、そのような個体変項を束縛変項と呼ぶ。また、束縛変項でない個体変項を自由変項と呼ぶ。

したがって $\exists x P(x) \wedge Q(x)$ においては、前の方の x は束縛変項であるが、後ろの方の x は自由変項であるということになる。

例 1 どの変項がどの量子子によって束縛されているか、ということを表す「束縛関係」は下のような図で表すことができる。



$x = y$ の x は $\forall x$ によって束縛されている。同様に、 $x = y$ の y と $y = x$ の y は $\exists y$ によって束縛されている。 $y = x$ の x は自由。

練習問題 4 以下の論理式の束縛関係を図で表してください。

1. $(\forall x(P(x) \rightarrow (\exists y(Q(x, y) \vee (\forall z(\neg R(z)))))$
2. $(\forall z((\exists y(\forall x P(x, y))) \rightarrow R(z)))$
3. $(\exists x(P(x) \vee (\neg(\exists y Q(a, b, y) \rightarrow (\forall z R(z)))))$

例 2 以下のような論理式では、 x は $\forall x$ によって束縛されており、 $\exists x$ によっては束縛されていない。

$$\exists x(\forall x(x = y))$$

このような論理式はまぎらわしいので、できる限り束縛変項を別のものに書き換えて $\exists y P(y) \wedge Q(x)$ などと表すことにする。(束縛変項は x でも y でもなんでもよいということとは前に見たとおり。) ただし、束縛変項を書き換える際には、束縛関係を保ったまま書き換えなければならない。

1. 束縛変項 y を z で置き換えたとき：

$$\exists y (\forall x P(x, y) \wedge Q(y, x)) = \exists z (\forall x P(x, z) \wedge Q(z, x))$$

2. 束縛変項 y, x を共に z で置き換えたとき；

$$\exists y (\forall x P(x, y) \wedge Q(y, x)) \neq \exists z (\forall z P(z, z) \wedge Q(z, x))$$

3. 束縛変項 x を w で置き換え， y を x で置き換えたとき；

$$\exists y (\forall x P(x, y) \wedge Q(y, x)) \neq \exists x (\forall w P(w, x) \wedge Q(x, x))$$

Remark 1 「誰もが誰かを愛している。」を翻訳すると、

$$\forall x \exists y \text{Love}(x, y)$$

となる。ここで、 x と y を以下のように入れ替えて見ると、

$$\forall y \exists x \text{Love}(y, x)$$

これでもやはり意味は同じである。が、次のようにすると

$$\forall y \exists x \text{Love}(x, y)$$

この論理式に対応する日常文は「どの人も誰かから愛されている。」という文であり、これは元の文とは意味が違ってしまふ。



- 状況 1 では、 $\forall x \exists y \text{Love}(x, y)$ 「誰もが誰かを愛している」は真だが、 $\forall y \exists x \text{Love}(x, y)$ 「どの人も誰かから愛されている」は偽である (b は誰にも愛されていない。)
- 状況 2 では、 $\forall x \exists y \text{Love}(x, y)$ は偽 (b は誰も愛していない。) であり、 $\forall y \exists x \text{Love}(x, y)$ は真である。

1.3 述語論理の自然演繹

述語論理の自然演繹は、命題論理の自然演繹を自然に拡張することによって得られる。これまでに見てきたように、Gentzen によって導入された自然演繹は、以下のような特徴をもっていた。

- 各推論規則は、われわれが普段論理推論をする際に使っている「推論法則・論法」をできる限り忠実に形式化したものである。
- 各推論規則は、誰もがただちに正しいと認めることのできるほど原始的（単純）な規則として定義されている。
- 各論理結合子（命題論理では $\wedge, \rightarrow, \neg, \vee$ ）に対して、導入規則（ I 規則）と除去規則（ E 規則）がそれぞれ定義されている。

ただし、付加規則として二重否定除去規則（や背理法）が定義されている。

以下の推論規則は命題論理の自然演繹の推論規則と同じ形であるが、ここでは（述語論理の推論規則としては）論理式 A や B はすべて述語論理の論理式である（命題論理の論理式ではない）ことに注意しておく。

\wedge 導入規則（ $\wedge I$ ）「 A という論理式と B という論理式が導けるとときには、 $A \wedge B$ という論理式を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array}}{A \wedge B} \wedge I$$

\wedge 除去規則（ $\wedge E$ ）「 $A \wedge B$ という論理式が導けるととき、 A という論理式を導いてよい」
「 $A \wedge B$ という論理式が導けるととき、 B という論理式を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \wedge B \end{array}}{A} \wedge E1 \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \wedge B \end{array}}{B} \wedge E2$$

\rightarrow 導入規則（ $\rightarrow I$ ）「 A という仮定から B という論理式が導けるとときには、 A という開いた仮定を閉じて $A \rightarrow B$ という論理式を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} [A]^n \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow I, n$$

\rightarrow 除去規則（ $\rightarrow E$ ）「 $A \rightarrow B$ という論理式と A という論理式を導くことができるときには、 B という論理式を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \rightarrow B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}}{B} \rightarrow E$$

\neg 導入規則 ($\neg I$) 「 A という仮定から矛盾 \perp が導けるときには、 A という開いた仮定を閉じて $\neg A$ という論理式を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} [A]^n \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \neg I, n$$

\neg 除去規則 ($\neg E$) 「 $\neg A$ という論理式と A という論理式を導くことができるときには、矛盾 \perp を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \neg A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}}{\perp} \neg E$$

\vee 導入規則 ($\vee I$) 「 A という論理式が導けるときには、 $A \vee B$ という論理式を導いてよい」「 B という論理式が導けるときには、 $A \vee B$ という論理式を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}}{A \vee B} \vee I1 \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array}}{A \vee B} \vee I2$$

\vee 除去規則 ($\vee E$) 「 $A \vee B$ という論理式が導け、また A という仮定からも、 B という仮定からも同じ論理式 C が導けるときには、仮定 A および仮定 B を除去して、論理式 C を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} [A]^n \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B]^n \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \vee E, n$$

\perp 除去規則 ($\perp E$) 「矛盾 \perp という論理式が導けるときには、任意の論理式 A を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \perp \end{array}}{A} \perp E$$

$\neg\neg$ 除去規則 ($\neg\neg E$) 「 $\neg\neg A$ という論理式が導けるときには、論理式 A を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\neg A \end{array}}{A} \neg\neg E$$

背理法 (RAA) 「 $\neg A$ という仮定から矛盾 \perp が導けるときには、開いた仮定 $\neg A$ を閉じて、論理式 A を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg A]^n \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A} RAA, n$$

(背理法は二重否定除去規則と同等である。)

定義 1 (証明可能性 (provability))

- 上記の推論規則を繰り返し適用することにより得られる木の形をした図式を証明図 (proof figure) と呼ぶ。
- 証明図の一番下の論理式をその証明図の結論 (conclusion) という。
- 開いた前提 (仮定) B_1, \dots, B_n から結論 A への証明図が存在するとき、(前提) B_1, \dots, B_n から (結論) A が証明可能である (provable) と言い、下のように表す。

$$B_1, \dots, B_n \vdash A$$

とくに、開いた前提が一つもないときには単に A は証明可能であると言い、 $\vdash A$ と表す。

上の $\wedge, \rightarrow, \neg, \vee$ に関する推論規則に、 \forall と \exists の推論規則を加えることにより、述語論理の自然演繹体系が得られる。

1.4 代入

量化子 $\forall x$ と $\exists x$ の推論規則を導入するために、論理式にあらわれる自由変項に対する代入という操作について説明しておく。

以下の論理式 (「 $x+1$ に等しいもの (自然数) が存在する」) では、 y は束縛変項であり、 x は自由変項である。

$$\exists y(x+1=y)$$

ここで、この自由変項 x に自然数 2 (という個体定項) を代入することにより、以下のような論理式が得られる。(「 $2+1$ に等しいもの (自然数) が存在する」)

$$\exists y(2+1=y)$$

このように、一般に自由変項には個体定項や個体変項を代入することができる。

一般に、論理式 A は複数の自由変項を含んでいる。 A が自由変項 x を含んでいる (ひとつとは限らないし、ゼロ個の場合もあり得る) ということを以下のように表す。

$$A[x]$$

(上の表記は、 A が x しか自由変項として含んでいない、ということではない。 x 以外の他の自由変項や束縛変項を含んでいるかもしれないが、とくにいま x という自由変項に注目しているということを表している。)

また、 t が個体定項または個体変項のとき、 $A[x]$ の自由変項 x に t を代入して得られる論理式を以下のように表す。

$$A[x := t] \quad \text{または} \quad A[t/x]$$

上の例では、 $A[x]$ とは $\exists y(x+1=y)$ という論理式を表し (y は束縛変項!) $A[x:=2]$ は $\exists y(2+1=y)$ という論理式を表している。

また、たとえば $A[x]$ が $\exists y(x+x=y)$ という論理式を表しているときには、 $A[x:=2]$ は $\exists y(2+2=y)$ という論理式を表している。

さらに、一般に論理式 A には x という自由変項以外にも、 z や w など、他の自由変項を含んでいることもあり、それらにも注目したいようなときには、以下のように表す。

$$A[x, z, w]$$

たとえば、 $A[x, z]$ という表記によって、 $\exists y(x+z=y)$ という自由変項 x と z を含んでいる論理式を表現することができる。

ここで、論理式の自由変項に、自然数 2 などの個体定項を代入する場合はなんの問題もないが、 x や z などの個体変項を代入する場合には少し注意が必要である。たとえば、

$$\exists y(x+1=y)$$

という論理式の x に個体定項 (自然数) 2 を代入するような場合は、上で見たようになんの問題もない。また x に別の個体変項 z を代入する場合も以下のようにとくに問題はない。

$$\exists y(z+1=y)$$

ところが、上の論理式において束縛変項となっている個体変項 y を x に代入してしまうと、以下のような (自然数について考えれば) おかしな論理式が得られてしまう。

$$\exists y(y+1=y)$$

このように、論理式に束縛変項としてあらわれている個体変項を自由変項に対して代入することは許されないことに注意しなければならない。別の言い方をすれば、代入したときに束縛変項になってしまうような代入は許されないということである。(もしくは、束縛関係が変わってしまうような代入は許されないということである。)

1.5 \forall 除去規則 ($\forall E$)

まずは普遍量子化 $\forall x$ の除去規則についてみていく。この規則は、一般的にすべてのものに対して成り立つことから、具体的例を挙げるような規則である。

前提 すべてのものはいつか死ぬ (壊れる)。

結論 タロウはいつか死ぬ (壊れる)。

この推論を記号化すると、「* はいつか死ぬ」を $P(*)$ と表し、「タロウ」を a として、以下のように表すことができる。

$$\frac{\forall x P(x)}{P(a)}$$

このような推論を一般化したものが \forall 除去規則である。

\vdots
 \forall 除去規則 ($\forall E$ と略記する) $\forall x A$ (論理式 $\forall x A$ が導ける) が成り立つときには、
 任意の個体定項または個体変項 t について、以下のようにして論理式 $A[x := t]$ を導
 いてよい。

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \forall x A \end{array}}{A[x := t]} \forall E$$

ここで、論理式 $\forall x A$ の変項 x は束縛変項であるが、量子化子 $\forall x$ を消去して得られる論理
 式 A では、 x は自由変項となっている ($A[x]$ と表される) ことに注意。 $\forall E$ 規則をもっと
 細かく分解すると、以下のような 2 つの操作からなっていると考えることもできる。

1. $\forall x$ を消去する操作 $\begin{array}{c} \vdots \\ \forall x A \\ A[x] \end{array}$
2. 変項 x に t を代入する操作 $A[x := t]$

また A の自由変項 x に t を代入して論理式 $A[x := t]$ を得るとき、とくに変項を代入す
 るときには、代入した変項が $A[x := t]$ において束縛変項とならないように注意しなければ
 ならない。

例 3 ($\forall E$) x, y が自然数を値とする変項であるとき、以下のように $\forall E$ 規則を適用するこ
 とができる。

$$\frac{\forall x \exists y (x < y)}{\exists y (x < y)} \forall E$$

しかし、以下のような $\forall E$ の適用は許されない。

$$\frac{\forall x \exists y (x < y)}{\exists y (y < y)} \forall E \times$$

前提となっている論理式は「どんな自然数にも、それより大きな自然数が存在する」こと
 を意味していて明らかに真であるが、間違った $\forall E$ 規則を適用して得られた論理式は明ら
 かに偽である。

練習問題 5 以下を示してください。

1. $\forall x (P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))) , P(d) \vdash Q(d)$
2. $P(d) , \forall x (P(x) \rightarrow (P(x) \rightarrow Q(x))) \vdash Q(d)$
3. $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) , \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) , P(d) \vdash Q(d) \wedge R(d)$
4. $\forall x (P(x) \wedge (Q(x) \rightarrow R(x))) , \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash R(d)$
5. $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) , \neg Q(c) \vdash \neg P(c)$
6. $\forall x \forall y (P(x) \wedge (P(y) \rightarrow Q(y))) \vdash Q(d)$

1.6 \forall 導入規則 ($\forall I$ 規則)

普遍量化子 $\forall x$ の導入規則は、あるものについて成り立つことを一般化して、それをすべてのものについて主張する規則である。このような一般化に関する規則は、いつでも適用できるわけではなく、注意が必要である。 $\forall I$ 規則は以下のような推論規則である。

\forall 導入規則 ($\forall I$ と略記する) $\frac{\vdots}{A[x]}$ (論理式 $A[x]$ が導ける) が成り立ち、以下の条件を満たすとする。

条件: $A[x]$ に至る証明の開いた前提には x が自由変項としてあらわれていない。

このとき以下のようにして論理式 $\forall x A$ を導いてよい。

$$\frac{\vdots}{A[x]} \forall I \quad \forall x A$$

上のような条件を変項条件と呼ぶ。

この推論規則を用いて以下のような推論を行うことができる。

例 4 「* は授業に出席する」を $P(*)$ 、「* は演習を行う」を $Q(*)$ 、「* は成績 A をもらう」を $R(*)$ とする。

前提 1 授業に出席するものはみな演習を行う。 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

前提 2 演習を行うものはみな成績 A をもらう。 $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$

結論 授業に出席するものはみな成績 A をもらう。 $\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$

- 結論を導くために、まず誰かは限定しない不特定の個人 x さんについて、「 x さんが授業に出席している」と (暫定的に) 仮定する。

$$P(x)$$

- 前提 1 からこの x さんについて、「 x さんは演習を行っている」と結論することができる。

$$\frac{\frac{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))}{P(x) \rightarrow Q(x)} \forall E \quad P(x)}{Q(x)} \rightarrow E$$

- さらに前提 2 からこの x さんについて、「 x さんは成績 A をもらえる」と結論することができる。

$$\frac{\frac{\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))}{Q(x) \rightarrow R(x)} \forall E \quad \frac{\frac{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))}{P(x) \rightarrow Q(x)} \forall E \quad P(x)}{Q(x)} \rightarrow E}{R(x)} \rightarrow E$$

4. したがって、「 x さんが授業に出席している」という仮定なしに（仮定を閉じて）、「 x さんが授業に出席しているならば、その x さんは成績 A をもらえる」と結論することができる。

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))}{Q(x) \rightarrow R(x)} \forall E \quad \frac{\frac{\frac{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))}{P(x) \rightarrow Q(x)} \forall E \quad [P(x)]^1}{Q(x)} \rightarrow E}{R(x)} \rightarrow I, 1}{P(x) \rightarrow R(x)} \rightarrow E$$

5. ここで、「 x さんが授業に出席しているならば、その x さんは成績 A をもらえる」という結論は、特定の個人 x さんの性質には何も依存していない。つまり、このことは x さんではなくても誰についても成り立つ結論となっている。したがって \forall 導入規則を用いて「授業に出席するものはみな成績 A をもらえる」と結論することができる。

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))}{P(x) \rightarrow Q(x)} \forall E \quad [P(x)]^1}{Q(x)} \rightarrow E}{R(x)} \rightarrow I, 1}{\frac{P(x) \rightarrow R(x)}{\forall x(P(x) \rightarrow R(x))} \forall I} \rightarrow E$$

- ここで、3 のすぐ直後に $\forall I$ 規則を適用することはできない。

$$\frac{\begin{array}{c} P(x) \\ \vdots \\ R(x) \end{array}}{\forall x R(x)} \forall I \times$$

$R(x)$ という論理式に $\forall I$ 規則を適用して $\forall x R(x)$ という論理式を結論する際に、 $R(x)$ に至る証明図では $P(x)$ は開いた前提であり、そこに x が自由変項としてあらわれているため、変項条件が満たされていない。

この後に $\rightarrow I$ 規則を適用すると以下のようなおかしい結論が得られてしまう。

$$\frac{\frac{\frac{[P(x)]^1}{R(x)} \forall I \times}{P(x) \rightarrow \forall x R(x)} \rightarrow I, 1$$

この結論は「 x が授業に出ているならば、（その他の）全員が A をもらおう。」つまり「誰だか分からないが誰かある人（ x ）が（1 人でも）授業に出ているならば、（その他の）全員が A をもらえる」というおかしいことを意味する結論となっている。変項条件はこのような推論を防ぐためのものである。

すなわち、「 x さんが成績 A をもらえる」という結論 ($R(x)$) は、あくまで「その x さんが授業に出ている」という仮定のもとで成り立つことであって、その仮定を無視して x さんに限らず「全員が成績 A をもらえる」と結論することはできないのである。($P(x) \rightarrow R(x)$ という結論は特定の x さんには依存していない結論であることに注意。)

例 5 自然数に関する推論で、以下のように $\forall I$ 規則を間違えて適用すると、「すべての自然数は 0 に等しい」などというおかしい結論が得られてしまう。

$$\frac{\frac{\frac{[x=0]^1}{\forall x(x=0)} \forall I \times}{x=0 \rightarrow \forall x(x=0)} 1}{\forall y(y=0 \rightarrow \forall x(x=0))} \forall I \bigcirc$$

$$\frac{}{0=0 \rightarrow \forall x(x=0)}$$

例 6 ($\forall I$) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(P(x) \wedge Q(x))}{P(x) \wedge Q(x)} \forall E}{P(x)} \wedge E}{\forall xP(x)} \forall I$$

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(P(x) \wedge Q(x))}{P(x) \wedge Q(x)} \forall E}{Q(x)} \wedge E}{\forall xQ(x)} \forall I$$

$$\frac{\forall xP(x) \quad \forall xQ(x)}{\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)} \wedge I$$

練習問題 6 以下を示してください。

1. $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \forall x P(x, y)$
2. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) , \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow R(x))$
3. $\forall x P(x) \vdash \forall x \neg \neg P(x)$
4. $\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow R(x)))$
5. $\vdash \forall x(\neg P(x) \rightarrow (P(x) \rightarrow Q(x)))$
6. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) , \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \vdash \forall x((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x))$
7. 前提 1 すべての人間は哺乳類である。
前提 2 すべての哺乳類は動物である。
結論 それゆえ、すべての人間は動物である。
8. 前提 1 すべての港区民は東京都民である。
前提 2 どの東京都民も神奈川県民でない。
結論 それゆえ、どの港区民も神奈川県民でない。

9. 前提 1 政治家はすべて金持ちである。
 前提 2 小沢さんは政治家である。
 結論 それゆえ、小沢さんは金持ちである。
10. 前提 1 天才は狂人である。
 前提 2 狂人は不幸である。
 結論 それゆえ、天才は不幸である。
11. 前提 1 2 より大きい素数はすべて奇数である。
 前提 2 7 は 2 より大きい素数である。
 結論 それゆえ、7 は奇数である。
12. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$
13. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$
14. $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) \vdash \forall x(P(x) \wedge Q(x))$
15. $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \vdash \forall x(P(x) \vee Q(x))$ (逆は成り立たない。)
16. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$ (逆は成り立たない。)
17. $A \wedge \forall xP(x) \vdash \forall x(A \wedge P(x))$
 (ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。)
18. $\forall x(A \wedge P(x)) \vdash A \wedge \forall xP(x)$
 (ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。)
19. $A \vee \forall xP(x) \vdash \forall x(A \vee P(x))$
 (ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。)
20. $\forall x(A \vee P(x)) \vdash A \vee \forall xP(x)$
 (ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。)
21. $A \rightarrow \forall xP(x) \vdash \forall x(A \rightarrow P(x))$
 (ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。)
22. $\forall x(A \rightarrow P(x)) \vdash A \rightarrow \forall xP(x)$
 (ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。)

1.7 \exists 導入規則 ($\exists I$ 規則)

存在量化子 $\exists x$ の導入規則は、具体的な対象（たとえば自然数 2 やタロウという個人など）について成り立つことを抽象化（一般化）して、それが成り立つような何かが存在することを主張する規則である。たとえば以下のような推論である。

前提 3 は 2 より大きい自然数である。

結論 2 より大きい自然数が存在する。

上の推論の前提は具体的な自然数 3 に関する主張であり、結論はそれを抽象化した（具体的な自然数には言及しない）主張である。

この推論を記号化すると、「* は 2 より大きい自然数である」を $P(*)$ と表し、「3」を a として、以下のように表すことができる。

$$\frac{P(a)}{\exists x P(x)}$$

このような推論を一般化したものが \exists 導入規則である。

\exists 導入規則 ($\exists I$ と略記する) \vdots $A[x := t]$ (論理式 $A[x := t]$ が導ける) が成り立つときには、以下のようにして論理式 $\exists x A$ を導いてよい。

$$\frac{\vdots \quad A[x := t]}{\exists x A} \exists I$$

例 7

前提 誰もが誰かを愛している。 $\forall x \exists y L(x, y)$

結論 誰かが誰かを愛している。 $\exists x \exists y L(x, y)$

$$\frac{\frac{\forall x \exists y L(x, y)}{\exists y L(a, y)} \forall E}{\exists x \exists y L(x, y)} \exists I$$

例 8 $\neg \forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$

$$\frac{\frac{\neg \forall x P(x)}{\perp} \text{RAA, 1} \quad \frac{\frac{\frac{[\neg \exists x \neg P(x)]^1}{\exists x \neg P(x)} \exists I \quad \frac{\perp}{P(x)} \text{RAA, 2}}{\forall x P(x)} \forall I}{\perp} \perp E}{\exists x \neg P(x)} \perp E$$

Remark 2 $\exists I$ 規則で、 \exists によって束縛される x はすべての x でなくともよい。例えば以下のような推論が可能である。

$$\frac{\frac{\forall z(z = z)}{z = z}}{\exists x(z = x)} \exists I$$

(二段目の論理式 $z = z$ は $z = x[z/x]$ という論理式と見なされている。)

練習問題 7 以下を示してください。

1. $\forall xP(x) \vdash \exists xP(x)$
2. $\forall x(P(x) \wedge (Q(x) \wedge R(x))) , \forall x(Q(x) \rightarrow S(x)) \vdash \exists x(R(x) \wedge S(x))$
3. $\forall x(P(x) \wedge (P(x) \rightarrow Q(x))) \vdash \exists Q(x)$
4. $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))) , \forall x(P(x) \rightarrow S(x)) , \forall xP(x) \vdash \exists x((Q(x) \wedge R(x)) \wedge S(x))$
5. $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) \vdash \exists x\exists y(P(x) \wedge Q(y))$
6. 前提 1 デカルトは哲学者である。
 前提 2 デカルトは数学者である。
 結論 それゆえ、哲学者であり、なおかつ数学者である人が存在する。
7. 前提 1 小沢さんは政治家である。
 前提 2 小沢さんは金持ちである。
 結論 それゆえ、政治家で金持ちの人がいる。
8. 前提 1 7 は 2 より大きい素数である。
 前提 2 7 は奇数である。
 結論 それゆえ、2 より大きい素数で奇数であるものが存在する。

1.8 \exists 除去規則 ($\exists E$ 規則)

存在量子 $\exists x$ の除去規則は、あるものが存在することから、そのものにとりあえず適当な名前をつけて推論を進め、一般的な結論を導く推論法則である。

\exists 除去規則 ($\exists E$ と略記する) $\exists x A$ (論理式 $\exists x A$ が導ける) が成り立ち、また $A[x := t]$ という仮定から C が導ける) が成り立つとする。さらに以下の条件が満たされるとする。

(条件 1) C には、 x は自由変項としてあらわれていない。

(条件 2) x が $A[x := t]$ 以外の開いた前提において自由変項としてあらわれていない。

このとき $A[x := t]$ という仮定なしに (仮定を閉じて) 論理式 C を結論してよい。

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \exists x A \end{array} \quad \begin{array}{c} [A[x := t]]^n \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \exists E, n$$

例 9

前提 1 数学者が存在する。 $\exists x P(x)$

前提 2 すべての数学者は変人である。 $\forall x (P(x) \rightarrow R(x))$

結論 変人が存在する。 $\exists R(x)$

1. 前提 1 で存在するもの (人) は、どういうものかは分からないが、とりあえず適当に a さんと名付ける。

$$P(a)$$

ここで、この a さんは誰か特定のものではあってはならない。たとえば特定の個人「ゲーデル」をとって、(ゲーデルはユダヤ人ではないが、自身がユダヤ人であると信じ込み、毒殺を恐れて食事をせずに餓死したといわれている) ゲーデルが変人だから、という理由で「変人が存在する」と結論することはできない。そうすると、この結論はゲーデルという特定の個人の性質に依存した結論となってしまうからである。

とりあえず名前を付けた a さんは、不特定の個人でなければならない。

2. 前提 2 はすべての数学者は変人であると述べているので、とくに a さんについても、「 a さんが数学者ならば a さんは変人である」ことが分かる。

$$\frac{\forall x (P(x) \rightarrow R(x))}{P(a) \rightarrow R(a)} \forall E$$

3. 上の 1 とあわせて、「 a さんは変人である」ことが分かる。

$$\frac{\frac{\forall x(P(x) \rightarrow R(x))}{P(a) \rightarrow R(a)} \forall E \quad P(a)}{R(a)} \boxed{\rightarrow E}$$

4. よって「変人が存在する」と結論することができる。

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(P(x) \rightarrow R(x))}{P(a) \rightarrow R(a)} \forall E \quad P(a)}{R(a)} \rightarrow E}{\exists x R(x)} \boxed{\exists I}$$

5. このようにして得られた結論 $\exists x R(x)$ は、 a さん個人に関する主張ではなく、 a さんに限らず一般的に「変人が存在する」という主張となっている。すなわち、ある不特定の個人 a さんに関する「 a さんが数学者である ($P(a)$)」という仮定から、 a さんに固有の性質などに訴えることなく、 a さんに限らない一般的な主張 ($\exists x R(x)$) を導くことができたのである。

このようなときに、「 a さんが哲学者である ($P(a)$)」という仮定を用いずに (閉じて) それを抽象化した「誰か分からないが哲学者が存在する ($\exists x P(x)$)」という仮定を用いて、 $\exists E$ 規則を適用して以下のように結論することができる。

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(P(x) \rightarrow R(x))}{P(a) \rightarrow R(a)} \forall E \quad [P(a)]^1}{R(a)} \rightarrow E}{\frac{\exists x P(x) \quad \frac{R(a)}{\exists x R(x)} \exists I}{\exists x R(x)} \boxed{\exists E, 1}}$$

- 3 の後すぐに $\exists E$ を適用することはできない。(変項条件 1)

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(P(x) \rightarrow R(x))}{P(a) \rightarrow R(a)} \forall E \quad P(a)}{R(a)} \rightarrow E}{\frac{\exists x P(x) \quad R(a)}{R(a)} \exists E \times}$$

この結論 $R(a)$ は「 a さんが変人である」という a さんに関する主張であって、一般的な結論ではない。このようなときには $\exists E$ 規則を適用することはできない。

まとめると、 \exists 除去規則は以下のように用いられる。

- あるものが存在することが分かっているとする。 $\exists x P(x)$
- そのあるものにとりあえず名前をつける。 $P(a)$
- 不特定の個体 a に関する仮定 $P(a)$ から、 a に限らない一般的な結論 C を導く。
- a に関する仮定 $P(a)$ を用いることなく (仮定を閉じて) その一般的な結論 C を結論することができる。

例 10 $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$

$$\frac{\frac{\frac{\forall x \neg P(x)}{\neg P(a)} \forall E \quad [P(a)]^1}{\perp} \neg E}{\frac{[\exists x P(x)]^2}{\perp} \exists E, 1} \neg I, 2$$

練習問題 8

1. $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$
2. $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \vdash \exists A(x) \rightarrow \exists B(x)$
3. 前提 1 ある港区民は料理人である。
前提 2 すべての港区民は東京都民である。
結論 それゆえ、ある料理人は東京都民である。
4. 前提 1 このクラブのすべての会員はタロウの友人である。
前提 2 トシのある友人はこのクラブの会員である。
結論 トシのある友人はタロウの友人である。
5. 前提 1 このクラブのある会員はタロウの友人でない。
前提 2 このクラブのすべての会員はトシの友人である。
結論 トシのある友人はタロウの友人でない。
6. 前提 1 タロウのどの友人もこのクラブの会員でない。
前提 2 このクラブのある会員はトシの友人である。
結論 トシのある友人はタロウの友人でない。
7. 前提 1 この箱の中のある指輪はユキの指輪である。
前提 2 どの金の指輪もユキの指輪でない。
結論 この箱の中のある指輪は金の指輪でない。
8. $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vdash \exists x (P(x) \vee Q(x))$
9. $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
10. $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ (逆は成り立たない。)
11. $\exists x P(x) \rightarrow A \vdash \forall x (P(x) \rightarrow A)$
(ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。)
12. $\forall x (P(x) \rightarrow A) \vdash \exists x P(x) \rightarrow A$
(ただし A は自由変項 x を含まない論理式とする。)

13. $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$
14. $\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x) \vdash \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$
15. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$
16. $\neg\forall xP(x) \vdash \exists x\neg P(x)$
17. $\exists x\neg P(x) \vdash \neg\forall xP(x)$
18. $\neg\exists xP(x) \vdash \forall x\neg P(x)$
19. $\forall x\neg P(x) \vdash \neg\exists xP(x)$

1.9 述語論理の自然演繹：推論規則のまとめ

\wedge 導入規則 ($\wedge I$) 「 A という論理式と B という論理式が導けるときには、 $A \wedge B$ という論理式を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array}}{A \wedge B} \wedge I$$

\wedge 除去規則 ($\wedge E$) 「 $A \wedge B$ という論理式が導けるとき、 A という論理式を導いてよい」
「 $A \wedge B$ という論理式が導けるとき、 B という論理式を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \wedge B \end{array}}{A} \wedge E1 \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \wedge B \end{array}}{B} \wedge E2$$

\rightarrow 導入規則 ($\rightarrow I$) 「 A という仮定から B という論理式が導けるときには、 A という開いた仮定を閉じて $A \rightarrow B$ という論理式を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} [A]^n \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow I, n$$

\rightarrow 除去規則 ($\rightarrow E$) 「 $A \rightarrow B$ という論理式と A という論理式を導くことができるときには、 B という論理式を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \rightarrow B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}}{B} \rightarrow E$$

\neg 導入規則 ($\neg I$) 「 A という仮定から矛盾 \perp が導けるときには、 A という開いた仮定を閉じて $\neg A$ という論理式を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} [A]^n \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \neg I, n$$

\neg 除去規則 ($\neg E$) 「 $\neg A$ という論理式と A という論理式を導くことができるときには、矛盾 \perp を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \neg A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}}{\perp} \neg E$$

\vee 導入規則 ($\vee I$) 「 A という論理式が導けるときには、 $A \vee B$ という論理式を導いてよい」「 B という論理式が導けるときには、 $A \vee B$ という論理式を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}}{A \vee B} \vee I1 \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array}}{A \vee B} \vee I2$$

\vee 除去規則 ($\vee E$) 「 $A \vee B$ という論理式が導け、また A という仮定からも、 B という仮定からも同じ論理式 C が導けるときには、仮定 A および仮定 B を除去して、論理式 C を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} [A]^n \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B]^n \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \vee E, n$$

\forall 導入規則 ($\forall I$) 「以下の条件のもとで $A[x]$ という論理式が導けたとする。

(条件) $A[x]$ に至る証明の開いた前提には x が自由変項としてあらわれていない。

このとき論理式 $\forall x A$ を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A[x] \end{array}}{\forall x A} \forall I$$

\forall 除去規則 ($\forall E$) 「 $\forall x A$ という論理式が導けるときには、任意の個体定項または個体変項 t について、論理式 $A[x := t]$ を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \forall x A \end{array}}{A[x := t]} \forall E$$

(x に個体変項 y を代入する際には、代入した y が $A[x := y]$ において束縛変項とならないように注意しなければならない。)

∃ 導入規則 (∃I) 「論理式 $A[x := t]$ が導けるときには、論理式 $\exists x A$ を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A[x := t] \end{array}}{\exists x A} \exists I$$

∃ 除去規則 (∃E) 論理式 $\exists x A$ が導け、 $A[x := t]$ という仮定から C が導けるとする。さらに以下の条件が満たされるとする。

(条件 1) C には、 x は自由変項としてあらわれていない。

(条件 2) x が $A[x := t]$ 以外の開いた前提において自由変項としてあらわれていない。

このとき $A[x := t]$ という仮定なしに (仮定を閉じて) 論理式 C を結論してよい。

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \exists x A \end{array} \quad \begin{array}{c} [A[x := t]]^n \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \exists E, n$$

⊥ 除去規則 (⊥E) 「矛盾 ⊥ という論理式が導けるときには、任意の論理式 A を導いてよい」

$$\frac{\vdots}{\perp} \perp E$$

¬¬ 除去規則 (¬¬E) 「 $\neg\neg A$ という論理式が導けるときには、論理式 A を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\neg A \end{array}}{A} \neg\neg E$$

背理法 (RAA) 「 $\neg A$ という仮定から矛盾 ⊥ が導けるときには、開いた仮定 $\neg A$ を閉じて、論理式 A を導いてよい」

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg A]^n \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A} RAA, n$$

(背理法は二重否定除去規則と同等である。)