第１０回補足資料

音声なし、　初版

この版では、第１０回授業範囲のうちで基本ｎ基本教材の範囲内の部分だけを公開します。基本教材の型付λ項の節までが第３回レポート課題の範囲です。第３回レポート課題は、第２回レポート課題締め切り後に出題します。第３回レポート課題が今学期の最終レポート課題です。上級者ボーナス点用のクイズは別に出題しますがこれは提出するかしないかは自由です。（９枚目スライドに予定を書いています）

上級者への発展的話題を多少加えた第１０回補足資料音声付き・音声なし版は近日中に公開します。

命題論理の証明論の説明のところでスキップしていた最後の二つの推論規則を開設することから始めます。(P.19)
矛盾（記号）の消去規則と二重否定の消去規則です。

11. $\perp$$-$**E**： $\perp$(矛盾) が主張されれば，任意の A が主張できる .

$$\frac{\perp}{A}\ \perp{-}E$$

12. $\neg\neg$$-$**E**： $\neg\neg A$ が主張されれば，A が主張される .

$$\frac{\neg\neg A}{A}\ \neg\neg{-}E$$

11.矛盾が結論できたらそのあとどんな命題‘（論理式）でも導ける

- 少し違和感を持つ人がいるかもしれませんが、
- まずこの⊥-E規則だけの証明を考え、次にならばの導入規則

→-Iにより前提だった⊥にカギカッコを付けて、［⊥]とすると、

前提なしに、どんな論理式、例えばCを選んでも、 ⊥ →Cが

前提なしに証明できることとなります。

ここでCはどんな論理式でもよく、意味論的値はtでもfでもあり得ます。一方、矛盾⊥は常に偽fの意味に定まっている命題定項です。（⊥は大文字のFと書くこともあります。）

この11番の⊥-E規則は、→の真理表による意味指定の３行目と４行目の、あのすこし怪しく見える真理表と一致するように規則を設定しているとみなすこともできます。

例題3.8から
真理表の意味論によると、「AからばB」と「Aでないか、またはB」とは同じ真理表となり、同値です。ですので「同じ意味の文」ということになります。これを証明論の上でも示そうとするとき、矛盾の消去規則で勝手な命題を選べるので、Bを選ぶと、下の証明ができることになります。（「または」の消去規則については前にやりましたが、はっきりしない人はその規則復習しておいてください。）

1. $(\neg A \lor B) \to (A \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A \lor B]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [\neg A]^1}{\bot}\,{\scriptstyle \neg - E}}{B}\,{\scriptstyle \bot - E} \qquad [B]^1}{B}\,{\scriptstyle \lor - E,1}}{A \to B}\,{\scriptstyle \to - I,2}}{(\neg A \lor B) \to (A \to B)}\,{\scriptstyle \to - I,3}$$

12.二重否定消去規則　¬ ¬-E
「否定の否定なら肯定」という規則

（例えば、告白して、相手のかたに「あなたのことを嫌いではないのですが」というところまで聞いて、「好きだ」と推論する人の論理：命題の値は真偽の２値だけで、「否定」の意味は値を逆転させる個こと、という真理表意味論。

- 否定¬の意味は真理値を逆転させることだと理解する、¬の真理表による意味規定がちょうどこれに当たります。真理値を逆転させるだけなので、２度逆転させればもとの真理値に戻ることを示してます。形の上では否定記号が二つ続けて入る場合、それを消した論理式とみなしてよいとするる規則です・

- ですので、12.二重否定消去規則　¬ ¬-Eは、¬の証明の振る舞いを真理表の（表示的）意味論の意味に合わせるために、強引に加えた推論規則とみなすこともできます。

- 一体、真理表の意味論が命題論理の基本なのか、この１２番の推論規則が入っていない証明論が命題論理の基本なのか？この問題には様々な視点や立場や論争の歴史があります。おおざっぱに分けると、前者は古典論理主義、後者は直観論理主義とか校正論理主義と区別されます。
- 「計算論理学」というこの授業テーマの観点からすると、後者の方に命題論理の基盤があるという見方が、有力と言えます。例えば授業で取り上げた型付き計算モデルとしての型付きλ計算に対して¬ ¬-Eに対応するものは含まれていません。

例3.9から：

「宇宙から来たUFOがいる　または　いない」「今学期の計算論理学で予想外の成績がつくまたはつかない」のような命題は真理表の意味論では真です。「Aまたは否定のA」を目標（Goal)として、これまでのGoal-Oriented ボトムアップ証明検索という定石から始めて、導入規則を逆に下から分解できるところまで分解しようとすると、A∨¬Aの∨を∨-I規則を使って、Aを次の証明目標(Sub-goal)とするか、¬Aを次の証明目標(Sub-goal)とするか、選ばねばならなくなります。でも、論理だけで物理観測の証拠もなしに、「宇宙から来たUFOがいる　」ことを命題論理だけで前提なしに証明することも、その否定命題を証明することも不可能なことは明らかです。
このようなとき、証明検索の定石通りの戦略をあきらめることになります。
Aの内容や計算論的情報が十分でなければ、直観主義論理・構成的論理では、ここで証明検索はストップします。Aとわかるか¬Aと分かるか、どちらかが証明できる手立てがないとそうあります。
一方、¬¬-E規則を認めて、証明を真理表意味論に合わせる古典論理主義では、このように証明検索の定石の戦略に行き詰ったとき、二重否定消去規則を利用して、定石に戻ることをします。ここで、否定の導入規則¬-Iを使って一歩上に進めています。

2. $A \vee \neg A$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \vee \neg A}\,{\scriptstyle \vee-I} \qquad [\neg(A \vee \neg A)]^2}{\bot}\,{\scriptstyle \neg-E}}{\neg A}\,{\scriptstyle \neg-I,1}}{A \vee \neg A}\,{\scriptstyle \vee-I} \qquad [\neg(A \vee \neg A)]^2}{\bot}\,{\scriptstyle \neg-E}}{\neg\neg(A \vee \neg A)}\,{\scriptstyle \neg-I,2}}{A \vee \neg A}\,{\scriptstyle \neg\neg-E}
$$

上級者向け：「ならば」が先か、「否定」が先か

- 型付きλ計算（及びそのカリー＝ハワード同型を通じた論理証明）と、それらを基盤にした様々な型付きプログラミング言語や証明支援言語（第９回補足資料改訂版の最後のページも参照）はどれも直観主義・構成主義論理に基づいていると言えます。
- 真理表の意味音で代表される古典論理は、「A→B」は¬A∨Bと同じ意味となり、二重否定消去規則を含む真理表の「否定」をもとにして「ならば」を定義していると言えます。他方で、直観主義論理・構成的論理は、「ならば」の推論規則（導入規則と消去規則）が先で、「Aの否定」は「ならば」を使って、「Aならば矛盾」と定義します。このことは既に補足資料で解説しました。その代わり、そのような「否定」では、¬¬-E規則を一般に認めないので、A∨¬Aはいつでも証明できるとは限らなくなります。

上級者向け：A∨¬Aについて

Aとして、「円周率πの無限少数展開を十進法小数点表記でしていったときに、7が続けて10桁現れる」

を考えましょう。

A∨¬Aは真理表意味論的には真です。でもこれにどんな情報があるのか？我々にとってのどんな知識や知識情報学的意味があるのか。

　πは無理数で超越数ですが、簡単な計算規則を持ちどんな桁までも計算計算可能です。

ですので、Bを「πの小数点以下ちょうど1兆1桁目の数は７である」とすると、B∨¬Bは直観主義的にも意味があり、真偽の計算の仕方もあり、「B∨¬B」が構成主義的に証明できたときには、Bであることの証明か¬Bであることの証明のどちらかの証明が提供されることとなります。

でも、上のAについては、πの小数点展開が無限に計算できるにもかかわらず、証明する手立てがほとんどなく、1000兆桁まで計算したところでまぐれでAか¬Aが示せることもないと思われます。

同様に、「または」の代わりに「存在する」という論理用語を用いた場合に、直観主義・構成主義ベースの型付き言語では、その存在するという仕様記述の証明から、仕様を満たすプログラムが具体的にどんなプログラムかを、抽出してくれる枠組みが作れます。

今後の予定

- 構成的（直観主義的）論理の操作的意味論と古典主義論理（二重否定消去規則入り）論理の表示的意味論の比較
- 万能計算モデルとしての、ラムダ計算、チューロングマシン、帰納的関数論の比較
- 第３回目提出必須レポート課題（範囲は基本教材の型付きλ計算まで。基本教材で触れていることだけ）についての出題と解答作成のためのヒント
- 上級者向けボーナス点用クイズ
- 時間が余れば、上級者向けに、型付きラムダ計算などの応用例紹介

などを予定しています。

- 真理表による論理記号の意味論と推論規則による証明の関係　（基本教材p.25)
- 今回２つの推論規則を追加したことにより、「完全性定理」も成立します

定理 3.1 (健全性 (soundness)) 証明可能な論理式はすべてトートロジーである．この性質を持つ論理体系を**健全である**という．よって命題論理の自然演繹体系は健全である．

定理 3.2 (完全性 (completeness)) トートロジーな論理式は，すべて証明可能である．この性質を持つ論理体系を**完全である**という．よって命題論理の自然演繹体系は完全である．