第３回授業補足教材

計算論理学10月１９日月曜日　岡田光弘

真理表による命題論理意味論（表示的意味論初歩）と命題論理の証明論導入

前回の問いの答えについては後日公開します。

次回第４回目授業で履修者全員への第１回目提出用課題を出題します。

基本教材のP11ページ題、練習問題なども活用して真理表を作成できるようにしておいてください。論理的接続子の意味を与える基本的真理表を組み合わせて、より複雑な論理式（文）の真偽値的意味が決定できる、という考え方を「意味の合成原理」と呼びます。下の例では複合文の真偽値がA,Bの真偽値によらずに常に真となっっています。このような時、この文はトートロジー（恒真）であると言います。
下の例では同地の左辺の文と右辺の文の値の取り方がf,t,t,tと同じであることが、４列目と７列目を比べるとわかります。そのようなとき、このふたつの文は同じ意味であると考えます。
「（のどが渇いていてかつおなかがすいている、というわけではない」と「のどが渇いてはいないまたはおなかがすいていない」は我々の採用する「かつ」「または」「でない」の意味では同じ意味の文となるわけです。）

3. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$

「同じ意味」ということについて

- もし、この真理表の節の練習問題だけでは物足りない人がいたら、次の節「命題論理の証明論」の後にある練習問題3.13を、真理表の意味論の観点でやってみてください。この練習問題は、「証明論」を勉強してから、証明論の立場で解いてもらうことを意図していますが、真理表意味論の立場で解くこともできます。そのとき重要になるのは、前のページにある「（意味論的に）同じ意味である」という概念です。
- 次のページからが今回第３回目の講義内容の最もエッセンシャルな部分です。「真理表意味論から証明論への移行」についてです。さらに補助的な参考資料については後ほど遅くしますが、まずはここで引用している基本教材の部分をこのスライドを補助として学習してください。

下の例題は真理表による各論理記号（論理的接続子）の（表示的意味論的）の真理値定義より明らかです。

例 3.3　次のことが成立する．

1. A, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \wedge B$ も $\boldsymbol{t}$.

2. $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら A は $\boldsymbol{t}$.
   $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.

3. $A \to B$ が $\boldsymbol{t}$ で A も $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.

4. A が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.
   B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.

これらは真理表により示すことができる．

A	B	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \vee B$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$

例えば下の２については、A∧Bがt(真）となるのは真理表のどの行とどの行であるかを探します。すると、第１行目だけだということが表からわかります。つまり、私たちが採用する（表示的）意味論では、「AかつB」が真である（真という表示的見を持つ）のは、１行目の場合だけであることが分かります。

例 3.3　次のことが成立する．

1. A, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \wedge B$ も $\boldsymbol{t}$.
2. $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら A は $\boldsymbol{t}$.
   $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.
3. $A \to B$ が $\boldsymbol{t}$ で A も $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.
4. A が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.
   B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.

これらは真理表により示すことができる．

A	B	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \vee B$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$

第１行目とは、AもtでBも t であり場合のことです。そのことから、下の３が帰結するわけです。この２番の例では、真理表内の情報を左から右に探していくのではなく、まず右端の真偽値を調べてから、求める真偽値をとるのはAとBがどんな真偽値の場合であるか、つまり何合目と何行目の場合か、を探すことになります。

例 3.3　次のことが成立する．

1. A, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \wedge B$ も $\boldsymbol{t}$.

2. $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら A は $\boldsymbol{t}$.
   $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.

3. $A \to B$ が $\boldsymbol{t}$ で A も $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.

4. A が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.
   B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.

これらは真理表により示すことができる．

A	B	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \vee B$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$

同様に下の例の3番を考えてみましょう。　A→Bがt(真）で、Aも t （真）であるときはどんな場合にもBが真になることを示したいわけです。「どんな場合にも」と言いましたが、「場合」は実際には４通りしかありません。「AもBも両方tの場合」「AがtでBがf」の場合、「AがfでBがt」の場合、「AもBもf」の場合の４覚利です。これが真理表の左端に４行で表示されているわけです。

例 3.3　次のことが成立する.

1. A, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \wedge B$ も $\boldsymbol{t}$.
2. $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら A は $\boldsymbol{t}$.
   $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.
3. $A \to B$ が $\boldsymbol{t}$ で A も $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.
4. A が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.
   B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.

A	B	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \vee B$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$

これらは真理表により示すことができる.

すでにこの例題3.3を自分でも確かめてみた人は次に進んでください。
そうでない人は、今確かめてください。
次のページで答え合わせをします・

例 3.3　次のことが成立する．

1. A, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \wedge B$ も $\boldsymbol{t}$.

2. $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら A は $\boldsymbol{t}$.
   $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.

3. $A \to B$ が $\boldsymbol{t}$ で A も $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.

4. A が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.
   B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.

A	B	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \vee B$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$

これらは真理表により示すことができる．

答え：　まず、A→Bの真理表的意味の与え方（真偽の与え方）に従って、これがttとなるのはどの場合とどの場合とどの場合かを確かめます。４つの場合に対するA→Bの真偽の取り方は、上からt, f, t, t でした。つまり「AがtでBが ｆ 」という場合（表の２行目）以外はA→Bはtであう、というように私たちは「もしAならばB」（A→B）の意味を真理表で定義しました。よってA→Bがtであるという条件だけからはBの値はtにもfにもなることが表の１、３、４行目から）わかります。しかしそのなかでAがtになるのは、表の１ぐ青梅だけです。そしてその時のBの値はtdです。

例 3.3　次のことが成立する .

例 3.3　次のことが成立する .

1. A, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \wedge B$ も $\boldsymbol{t}$.
2. $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら A は $\boldsymbol{t}$.
   $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.
3. $A \to B$ が $\boldsymbol{t}$ で A も $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.
4. A が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.
   B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.

これらは真理表により示すことができる .

A	B	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \vee B$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$

例3.3で示されているのはそれぞれ一つの論理記号（論理的接続子）について、真でありこと（値tを持つこと）がどのように保存されるかを示しており、各論理記号に特有の基本的な性質と言えます。ここで各論理記号（論理的接続子）の真理表的意味に立ち戻ってこれらの性質を確認し終わったので、今後は真理表で確かめることなく用いることができる性質です。

例 3.3　次のことが成立する .

例 3.3　次のことが成立する .

1. A, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \wedge B$ も $\boldsymbol{t}$.
2. $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら A は $\boldsymbol{t}$.
   $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.
3. $A \to B$ が $\boldsymbol{t}$ で A も $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.
4. A が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.
   B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.

これらは真理表により示すことができる .

A	B	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \vee B$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$

「真である」とか「値がtだ」と言わなくても、値tが保存されつ仕方で、議論していくことを、論理的証明と呼びます。下の４つは論理的証明を形成するステップとして用いられます。そのような論理的証明の各ステップが従う規則を（論理的）推論規則と呼ぶことにします。下の４つは、１「AtとBが証明されれば、A∧Bと主張できる」、２「A∧Bが証明されれば、Aと主張できる」「A∧Bが証明されれば、Bと主張できる」、３「A→BとAが証明できれば、Bと主張できる」、４．「A∨Bが証明できれば、Aと主張できる」「A∨Bが証明できれば、Bと主張できる」という推論規則として表現できます。

例 3.3　次のことが成立する．

1. A, B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \wedge B$ も $\boldsymbol{t}$.

2. $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら A は $\boldsymbol{t}$.
   $A \wedge B$ が $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.

3. $A \to B$ が $\boldsymbol{t}$ で A も $\boldsymbol{t}$ なら B は $\boldsymbol{t}$.

4. A が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.
   B が $\boldsymbol{t}$ なら $A \vee B$ は $\boldsymbol{t}$.

A	B	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \vee B$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$

これらは真理表により示すことができる．

意味論から命題論理の証明論（３章）へ

いま見てきたことをもとに、次のトピックである「証明論」を導入します。この証明論は、一方で今見てきた真理表の意味論と対応していますが、他方でその次の話題である計算論と直接関係します。

意味論的に証明論を考えると、論理的リーズニング（思考）で真である主張を結論付ける論証を形成することに対応します。

一方で、計算論（特にこの授業でまず扱うラムダ計算による計算モデル）においては、（型付き）プログラムに対応します。

命題論理という限られた言語で解説するので、証明やプログラムの表現力も限定的ですが、それらの本質的スピリットは十分見て取れます。

真理表意味論を離れた推論規則表現入門

先ほど通常の言葉で挙げた推論規則１「AとBが証明されれば、A∧Bと主張できる」、２「A∧Bが証明されれば、Aと主張できる」「A∧Bが証明されれば、Bと主張できる」を日本語を使わずに次のように表記することにします。水平線の上の論理式（文）が証明された時、証明の次のステップとして、証明をさらにONE　STEP進めることができるのが推論規則です。
」

命題論理の推論規則

1. $\wedge$**–I**： 2 つの論理式 A と B から論理式 $A \wedge B$ を推論してよい．これを次のように表記することとする．

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge\text{-}I$$

2 , 3. $\wedge$**–E**： 論理式 $A \wedge B$ から A を推論してよい．これを次のように表記することとする．

$$\frac{A \wedge B}{A}\ \wedge\text{-}E \qquad \text{又は} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge\text{-}E$$

このような推論規則を多数組み合わせていくことで、論理的証明が形成されます。基本教材の18ページも参照してください。ここに本授業で用いる推論規則がリストされていて、その最初のふ立つが　∧（かつ）に関する推論規則です。
∧-I規則は「かつ」の導入規則、と呼びます。∧-E規則は「かつ」の消去規則、と呼びます。Iは英語の導入(Introduction)の頭文字で、Eは英語の消去（Elimination）の頭文字です。

命題論理の推論規則

1. $\wedge$–**I**：2 つの論理式 A と B から論理式 $A \wedge B$ を推論してよい．これを次のように表記することとする．

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ {\scriptstyle \wedge-I}$$

2 , 3. $\wedge$–**E**：論理式 $A \wedge B$ から A を推論してよい．これを次のように表記することとする．

$$\frac{A \wedge B}{A}\ {\scriptstyle \wedge-E} \qquad \text{又は} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ {\scriptstyle \wedge-E}$$

Aが「太郎さんが今日のパーティに来る」を表し、Bが「次郎さんが今日のパーティに来る」を表していると売ると、AであることとBであることがそれぞれ別々に証明済みでありとすると、∧-I規則を適用して、「太郎さんが来るかつ次郎さんが来る」という「かつ」のついた結論の証明となりわけです。逆に、AかつBについて証明できていたら、∧-E規則を適用して「次郎さんが切る」ことが証明できることになります。あまりにも当たり前のステップに見えますが、この当たり前さが重要です。

命題論理の推論規則

1. $\wedge$–**I**： 2 つの論理式 A と B から論理式 $A \wedge B$ を推論してよい．これを次のように表記することとする．

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge{-}I$$

2 , 3. $\wedge$–**E**： 論理式 $A \wedge B$ から A を推論してよい．これを次のように表記することとする．

$$\frac{A \wedge B}{A}\ \wedge{-}E \qquad \text{又は} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge{-}E$$

このほか、真理表意味論に従って確かに真であることを保ったままで証明を進めていけることが分かった推論規則として、「または」の導入規則、「ならば：の消去規則を日本語で上げました。基本教材１８ページから１９ページにあります・
推論規則を組み合わせて、証明を作ります。「証明可能」の定義と「かつ」の消去規則と導入規則を組み合わせて作った証明の例です。基本教材19ページにあります。

定義 3.7 (証明可能) 論理式 A を終論理式とする証明が存在するとき，A **は証明可能である**と言うことにする．また，仮定 $B_1, \ldots, B_n$ から A が推論規則にしたがって主張できる時， **仮定** $B_1, \ldots, B_n$ **から** A **は証明可能である**と言う．

ここでいくつかの例を挙げる．

例 3.4 (証明) $\wedge$–I および $\wedge$–E を使うもの

1. 前提 $A \wedge B$ から $B \wedge A$ という帰結に至る証明．

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,{\scriptstyle \wedge-E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,{\scriptstyle \wedge-E}}{B \wedge A}\,{\scriptstyle \wedge-I}$$

AとBが先ほどの文だとすると、下の証明で前提として使っているのは、「太郎さんが来る、かつ、次郎さんが来る」ということです。この前提から、「かつ」についての２つの推論規則を使って、順序が異なる新しいじぇつろん「次郎さんが来る、かつ太郎さんが来る」を導出する証明を作成しています。

定義 3.7 (証明可能) 論理式 A を終論理式とする証明が存在するとき，A **は証明可能である**と言うことにする．また，仮定 $B_1, \ldots, B_n$ から A が推論規則にしたがって主張できる時， **仮定** $B_1, \ldots, B_n$ **から** A **は証明可能である**と言う．

ここでいくつかの例を挙げる．

例 3.4 (証明) $\wedge$–I および $\wedge$–E を使うもの

1. 前提 $A \wedge B$ から $B \wedge A$ という帰結に至る証明．

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\ {\scriptstyle \wedge-E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\ {\scriptstyle \wedge-E}}{B \wedge A}\ {\scriptstyle \wedge-I}$$

証明は論理言語の推論規則を組み合わせて作られていますが、いつでも日本語に直せます。この証明は、次のように進んでいます：いま、「太郎さんが来る、かつ次郎さんが来る」と前提します。ですので、「次郎さんは来る」と結論できます。他方で、「太郎さんが来る、かつ次郎さんが来る」と前提しているので、「太郎さんが来る」と結論できます。いま、「次郎さんが来る」ことを結露づけられましたし、「太郎さんが来る」ことも結論付けられました。ですので、「次郎さんが来る、かつ太郎さんがくる」ことが結論できます。

定義 3.7 (証明可能) 論理式 A を終論理式とする証明が存在するとき，A **は証明可能である**と言うことにする．また，仮定 $B_1, \ldots, B_n$ から A が推論規則にしたがって主張できる時，**仮定** $B_1, \ldots, B_n$ **から** A **は証明可能である**と言う．

ここでいくつかの例を挙げる．

例 3.4 (証明) $\wedge$–I および $\wedge$–E を使うもの

1. 前提 $A \wedge B$ から $B \wedge A$ という帰結に至る証明．

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\ {\scriptstyle \wedge-E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\ {\scriptstyle \wedge-E}}{B \wedge A}\ {\scriptstyle \wedge-I}$$

, 前のページの証明は、次の計算論的な解釈では、２引数のプログラムの引く数を入れ替えるプログラム建艦プログラムとしてみることもできます。（例えば第１引数がIInteger型で第２引数がCharacter型の時、その引く数の順序を入換える）

次の証明例も参考にして、下の練習問題を解いてみてください。提出する必要はありません。

2. 前提 $(A \wedge B) \wedge C$ から $B \wedge (C \wedge A)$ に至る証明 .

$$
\dfrac{
 \dfrac{\dfrac{(A\wedge B)\wedge C}{A\wedge B}\,{\scriptstyle \wedge-E}}{B}\,{\scriptstyle \wedge-E}
 \qquad
 \dfrac{\dfrac{(A\wedge B)\wedge C}{C}\,{\scriptstyle \wedge-E} \qquad \dfrac{\dfrac{(A\wedge B)\wedge C}{A\wedge B}\,{\scriptstyle \wedge-E}}{A}\,{\scriptstyle \wedge-E}}{C\wedge A}\,{\scriptstyle \wedge-I}
}{B\wedge(C\wedge A)}\,{\scriptstyle \wedge-I}
$$

練習問題 3.6 次の証明を示せ.

1. 前提 $A \wedge (B \wedge C)$ から $(A \wedge B) \wedge C$ に至る証明 .