第４回授業補足教材

基本教材の補足です。最初の２枚は復習です。

計算論理学10月26日月曜日　岡田光弘

今回の第４回目授業までの内容の範囲内で

履修者全員への第１回目提出用課題を出題します。基本教材の対応箇所の例題を確認しておいてください。今週後半に課題を出します。１０日間後に締め切ります。これまでの問いの解説もその時期に公開します。

スライドの誤植を直したバージョンもその時アップします。

Aが「太郎さんが今日のパーティに来る」を表し、Bが「次郎さんが今日のパーティに来る」を表しているとると、AであることとBであることがそれぞれ別々に証明済みでありとすると、∧-I規則を適用して、「太郎さんが来るかつ次郎さんが来る」という「かつ」のついた結論の証明となりわけです。逆に、AかつBについて証明できていたら、∧-E規則を適用して「次郎さんが切る」ことが証明できることになります。あまりにも当たり前のステップに見えますが、この当たり前さが重要です。

命題論理の推論規則

1. $\wedge$**–I**： 2 つの論理式 A と B から論理式 $A \wedge B$ を推論してよい．これを次のように表記することとする．

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ {\scriptstyle \wedge - I}$$

2 , 3. $\wedge$**–E**： 論理式 $A \wedge B$ から A を推論してよい．これを次のように表記することとする．

$$\frac{A \wedge B}{A}\ {\scriptstyle \wedge - E} \qquad \text{又は} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ {\scriptstyle \wedge - E}$$

証明は論理言語の推論規則を組み合わせて作られていますが、いつでも日本語に直せます。この証明は、次のように進んでいます：いま、「太郎さんが来る、かつ次郎さんが来る」と前提します。ですので、「次郎さんは来る」と結論できます。他方で、「太郎さんが来る、かつ次郎さんが来る」と前提しているので、「太郎さんが来る」と結論できます。いま、「次郎さんが来る」ことを結露づけられましたし、「太郎さんが来る」ことも結論付けられました。ですので、「次郎さんが来る、かつ太郎さんがくる」ことが結論できます。

定義 3.7 (証明可能) 論理式 A を終論理式とする証明が存在するとき，A **は証明可能である**と言うことにする．また，仮定 $B_1, \ldots, B_n$ から A が推論規則にしたがって主張できる時，**仮定** $B_1, \ldots, B_n$ **から** A **は証明可能である**と言う．

ここでいくつかの例を挙げる．

例 3.4 (証明) $\wedge$–I および $\wedge$–E を使うもの

1. 前提 $A \wedge B$ から $B \wedge A$ という帰結に至る証明．

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\ {\scriptstyle \wedge-E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\ {\scriptstyle \wedge-E}}{B \wedge A}\ {\scriptstyle \wedge-I}$$

ここから第４回講義

- 前回の授業で、基本教材の１８ページ１９ページにまとめてある推論規則（論理的に証明を構成していくときに前提が真であれば結論も真となる証明プロセスの基本ステップのうちの、４つの規則について、真理表的論理記号の意味（表示的意味）に従って（言い換えると真理表で与えられる意味に従って）確かに前提が真であれば結論も真となることを確かめたわけです。念のため記号ではなく日本語に翻訳して書いてみます。
- “かつ”の導入規則、　Aが真でBが真であれば、AかつB　も真
- ”かつ“の消去規則、”AかつB“が真であれば、Aは真　（Bについてもも同様）
- “または”の導入規則、 Aが真であれば“AまたはB”は真（Bについても同様）
- “ならば”の消去規則、Aが真でAばならばB“も真であれば、Bは真
- について確かめました。

規則を組み合わせることによって証明を作る

- 前回は“かつ”の導入規則のステップと“かつ”の消去規則のステップを組み合わせることによって、“
- “太郎さんが来るかつ次郎さんが来る”

という前提から

- “次郎さんがくるかつ太郎さんが来る”

という結論を導く「証明」を最初の証明の例として示し、

もっと複雑な例題や練習用の問題を出しました。

証明の構成でいま重要なことは、証明の各ステップは１８ページから１９ページに並べてある規則だけを使うということです。

“ならば”消去規則を用いた証明の例を考えましょう。

- 記号に既に慣れた人はっ基本教材の記号だけで考えてください。
- 記号の日本語訳があった方が学習が始めやすい人のために、今日はなるべき日本語の文も使いながら説明します。
- １８ページｋら１９ページの記号だけの説明と見比べてください。
- まず、“ならば”の消去規則だけを何度も組み合わせて作られる「証明」の例を見てみましょう。

風が吹けば桶屋が儲かる（論理推論バージョン）

風が吹く　風が吹く→砂埃が舞う

砂埃が舞う　砂埃が舞う→目を悪くする人が増える

目を悪くする人が増える　目を悪くする人が増える→三味線を弾く人が増
える

三味線を弾く人が増える　三味線を弾く人が増える→三味線が売
れる

三味線が売れる　三味線が売れる→猫が必要になる

猫が必要になる　猫が必要になる→猫の数が減る

猫の数が減る　猫の数が減る→鼠が増える

鼠が増える　鼠が増える→桶がかじられる

桶がかじられる　桶がかじられる→桶屋
が儲かる

桶屋が儲かる

古典落語「風が吹けば桶屋が儲かる」

- 「風が吹く」など１０個の文を前提（仮定）して、９回の“ならば”の消去規則が並んでいます。
- これは古典落語（や江戸時代の大衆本）で出てくる議論です。それを命題論理の推論規則に当てはめたのが前にページの形です。
- なぜ「風が吹けば桶屋が儲かる」と言えるのか、と尋ねられて上のような証明を作って見せます。（もとの古典落語にはいいまの時代から見ると差別用語などが使われているので、表現はすこしかえていますが、古典落語でもこの９ステップの“ならば”の消去規則が使われていると言えます。

“ならば”の導入規則：最も重要な推論規則

- ここで、古典落語の文脈を注意してみましょう。
- なぜ「風が吹けば桶屋が儲かる」のか、という証明の過程として、上の証明構造がつかわれたのですが、このままでは、１０個の前提があり、それらの前提から「桶屋が儲かる」が結論されただけです。
- 「桶屋が儲かる」が証明したいことではないのです、

ある程度他の前提はあるとしても、最終的な証明の結論は、

「桶屋が儲かる」ではなく、「風がふくならば桶屋が儲かる」としたいのです。「風が吹くならば桶屋が儲かる」という理由を論理的に説明することがここで求められています。ですから結論は

「もし風が吹くならば桶屋が儲かる」ということを（他の諸前提はそのまま前提としてとどめておくとしても）証明したいのです。

「ならば」のI－規則（導入規則）

- この規則は、基本教材１８ページから１９ページに並んでいる推論規則の中でも最も重要な規則です。（ラムダ計算の言葉に直すとラムダ抽象と呼ばれることになります）

- 基本教材のこのページには、Aという前提からBという結論がでてくる証明が作れたら、それは、「Aを前提にすればBが帰結する」ことを示しているので、結論を条件文に変えて、

ならば」の導入規則で「AならばB」と結論できる；前提であったAにカギカッコをつけて証明の前提ではなくなったことが分かるようにする；どの「ならば」の導入規則でカギカッコがついたかがわかるように、まだつかっていない同じ番号をAのカギカッコと「ならばー導入」規則の横につけておきます。

ならばのI（導入規則）を用いて、個連絡偽を完結させよう

- この、ならばのI（導入）規則があって初めて、

「風が吹くならば桶屋が儲かる」という形の結論の証明になるわけです。（もちろんまだ他の多くの前提は残っていて、それらが証明できることなのかどうかは怪しいですが。）

風が吹けば桶屋が儲かる（論理推論バージョン）

~~風が吹く~~　　風が吹く→砂埃が舞う

砂埃が舞う　　砂埃が舞う→目を悪くする人が増える

目を悪くする人が増える　　目を悪くする人が増える→三味線を弾く人が増える

三味線を弾く人が増える　　三味線を弾く人が増える→三味線が売れる

三味線が売れる　　三味線が売れる→猫が必要になる

猫が必要になる　　猫が必要になる→猫の数が減る

猫の数が減る　　猫の数が減る→鼠が増える

鼠が増える　　鼠が増える→桶がかじられる

桶がかじられる　　桶がかじられる→桶屋が儲かる

桶屋が儲かる

風が吹く→桶屋が儲かる

「風が吹くならば桶屋が儲かる」

- 前の“証明（前提１０個とならば”の消去規則だけを９回適用）の証明に、ならばのI-規則（導入規則）を一回だけ適用して、
- ９個の前提と９回のならばの消去規則と１回のならばの導入規則の証明ができたわけです。ここでは「風が吹く」の前提を赤い線で前提でなくなったと書いていますが、命題論理の証明では、カギカッコをつけて、番号（ここではほかに番号がないので１番の１でよいです）ください。

ならばのI-規則の簡単な使用例

- 前回、
- 「太郎か来るかつ次郎が来る」を前提として、

「次郎が来るかつ太郎が来る」の証明を作りました。
この証明のすぐ後に、ならばのI-規則を使えば、

「（太郎が来るかつ次郎が来る）ならば（次郎が来るかつ太郎が来る）」
という前提なしの証明になるわけです。

授業の後半では、CならばDの形の論理式はCの型のインプットを待ってDの方のアウトプットを返す関数型「サブプログラムの型」とみなします。

この、AかつBならばBかつAの「証明」は、この講義の後半では、２引数の関数型サブプログラムの引数の順序を入換えるプログラム変換プログラムとみなせることとなります。

ならばの導入規則についての補足的注意

- ならばのI-規則（導入規則）については、つぎのことにも注意してください。

- 前提が複数ある場合、
- いま簡単のために前提がA,とBの二つだとしましょう。これらの前提から結論Cの証明が作れたとします。そのとき、次にならばの導入規則を使おうとするときは、
- 前提Bはそのまま前提として残して、“AならばC”と証明を進めることもできれば、Aを前提のまま残して、“BならばC”と証明を進めることもできます。何をどんな順序で証明したいのかに依存するわけです。

ならばの導入規則についての補足的注意

- 今度は前提が、AとAとBの３つで結論がCの証明がつくられたとしましょう。
- このとき、Bは前提として残して、ならばのI-規則（導入規則）により“AならばC”としてよいわけですが、このときは、元の証明で前提Aは２か所でいてきていたものの、同じ前提なので、ならばの導入規則でAならばCと結論するときに、二つの同じ形の前提Aは一度にカギカッコをつけて前提でないと考えてよいことになります。このときは同じ番号を付けてください。

（上級者向け）否定の導入規則と消去規則の補足

- １９ページの否定のI-規則とE-規則はその通りに理解してもらえばよいですが、さらに補足するなら、実はこれは、新しい推論規則ではなく、ならばの規則の特殊例とみることができます

- ¬Aは「Aはない」の意味ですが、これは実は「ならば」と矛盾を表す記号を使って「Aならば矛盾」と表せます。

「Aならば」の導入規則と消去規則のBが矛盾記号の場合が、ちょうど否定の導入規則と消去規則の形なのです。

「または」について、及びそのあとのこと

- 第一回レポート問題で「または」については出題しません。そのあとの１９ページの規則も出題しません。
- 授業もここはあっさりやって、そのあとの「証明の正規化」のところに入ります。この「証明の正規化」の話題は論理証明のことと計算論のこととのちょうど中間の内容になります。第１回レポート課題の範囲ではありませんが、上級者の人はここを予習しておいてください。
- そのあと、ラムダ計算に入ります。ラムダ計算では、
- 論理式を型とみます・
- 証明をプログラムとみます、
- 証明の正規化をラムダ計算プログラムの実行とみます。

「または」のE-規則（消去規則）

- レポート課題には入れませんが、証明論として面白さがあるので余裕のある人はやってみてください。

「または」のI規則は既に前回導入しました。

- １９ページの「または」のE-規則（消去規則）の見方を解説しておきます。Aが「太郎さんが来る」、Bが「次郎さんが来る」
- Cが「花子さんは嬉しい」とします。
- 「AまたはB」がすでに分かっているとしますがAとBのどちらなのかは分かっていないとします。この「または」を外して証明を進めていくときに、「または」の消去規則をつかうわけです。

「または」のE-規則（消去規則）

Aが「太郎さんが来る」、Bが「次郎さんが来る」

Cが「花子さんは嬉しい」とします。

「AまたはB」がすでに分かっているとして、この「または」を外して証明を進めていくときに、「または」の消去規則をつかうわけです。

「または」の消去規則は数学では「場合分けの証明」と言われる証明のステップのことです。

- Aの場合を前提してみます。花子さんは太郎さんに好意を持っていることからAの場合からCに至る証明ができるとします。一方Bの場合を前提します。花子さんは次郎さんにお金を貸していて会えたら返してもれる考えていることから、Bの場合からCに至ると証明できるとします。このとき、「AまたはB」しかわかっていないのに、二つの場合分けで、どちらであってもCだとそれぞれ独自に証明できるので、Cと結論できる、というのが、「または」の消去規則です。

レポート課題や提出方法

- レポート課題や提出方法については、今週後半に授業支援システムでお知らせします。