第７回授業補足資料

(2020年11月１6日）

計算論理学

岡田光弘

前回の復習：下の定義4.2の３は、tが型Bのラムダ項の入力を待って、型Aのラムダ項を出力する関数型のラムダ項であり、ｔが入力として待っている型とｓの型が一致していたら、（ｔｓ）はラムダ項であり、特に全体の型はｔの出力の型となる。tが入力として待っている型とｓの型が一致するときに文法規則３が制限されているのが型付きラムダ項。（この制限を付けずに(ts)の構成を許すことにより型なしラムダ計算が派生する。）

定義 4.2 (ラムダ項 (λ-terms))

1. 各タイプ A に対して，変項として x^A, y^A, x_1^A, x_2^A を用いる．
2. もし t がタイプ A のラムダ項で，x^B がタイプ B の変項なら，$\lambda x^B t$ はタイプ $B \to A$ のラムダ項である．このとき，t に現われる x^B は束縛されると言われる．
3. もし t がタイプ $B \to A$ のラムダ項で s がタイプ B のラムダ項なら，(ts) はタイプ A のラムダ項である．

ラムダ計算では計算規則は本質的に１規則だけ：　β簡約と呼ばれつ「代入」操作だけで、計算を説明する計算モデル

任意のタイプ B と任意のラムダ項 t と s に対して、次のラムダ項の書き換え規則は β– **簡約規則**と呼ばれる．

$$(\lambda x^B t\ s) \rhd t[x^B := s] \qquad\qquad \text{ただし } s \text{ はタイプ } B \text{ とする。}$$

ここで $t : A$ とすると、$\lambda x^B t : B \to A$，$(\lambda x^B t\ s) : A$ かつ $t[x^B := s] : A$ となることが分かる。特に β– 簡約規則の左項と右項は同じタイプ A をもつ。

今，任意のラムダ項 u に β– 簡約規則の左辺の形の項 $(\lambda x^A t\ s)$ が現れているとする．このとき u に現れる $(\lambda x^A t\ s)$ の形の部分項のことを β– 簡約の**リデックス (redex)**(又は**可約部**) と呼ぶ．

ラムダ項 u にリデックスが１つも含まれない時,「 u は**正規形である**」と言われる．又は,「 u は**既約形である**」と言われることもある．) u が正規形でない場合は，一般にリデックスが複数含まれている．

具体的なデータ型の定義の例としてNatとBoolを取り上げる。Church Numeralsの命題論理版)

4.3　ラムダ項を用いたデータ型の定義の例 (Nat タイプ)

自然数を表わすデータ型 (タイプ)Nat を次のように定義する.

$$Nat :\equiv (P \to P) \to (P \to P)$$

具体的なデータ型の定義の例としてNatとBoolを取り上げる。

= 自然数の型

4.3　ラムダ項を用いたデータ型の定義の例 (Nat タイプ)

自然数を表わすデータ型 (タイプ)Nat を次のように定義する .

$$Nat :\equiv (P \to P) \to (P \to P)$$

Nat も Bool も基底型ではないことに注意！

Nat型（自然数型）を持つ対象0,1,2,3…
は次の型付きラムダ項たちで表現します

$$
\begin{aligned}
0 &:\equiv \lambda f^{P\to P}\lambda x^{P} x\\
1 &:\equiv \lambda f^{P\to P}\lambda x^{P}(fx)\\
2 &:\equiv \lambda f^{P\to P}\lambda x^{P}(f(fx))\\
&\vdots\\
n &:\equiv \lambda f^{P\to P}\lambda x^{P}(\underbrace{f(\cdots(f}_{n\text{ 個}}\,x)\cdots))
\end{aligned}
$$

fが何本入っているかがその数を表わしています

右よせカッコの省略

右よせのカッコは見やすさのために省略することがある
例えば2は $\lambda f^{P\to P}\lambda x^{P} ffx$ などとカッコなしで書く

2は $\lambda f^{P\to P}\lambda x^{P}\, f\, f\, x$

ここでどの変項記号を使うかが問題ではない

2は $\lambda g^{P\to P}\lambda z^{P}\, g\, g\, z$

$\lambda x^{P\to P}\lambda g^{P}\, x\, x\, g$

束縛関係だけが重要

束縛関係さえ一義的に定まっていれば変数記号を入換えてもラムダ項としては同じラムダ項と考えます。(専門的には、α-conversionと呼ばれる)

3のラムダ項に現れる

ｆ ｆ ｆ

ｇ ｇ ｇ

ｈ ｈ ｈ

等の記号は無巻稀有に、現れている模様 ”｜ ｜ ｜”が重要で、

３についての現る計算はこの模様（パターン）にｔしぃての操作です。
さらにその操作はすべて本質的にβ簡約と呼ばれる代入操作です。

fff とだけ書かずに λf.λx. f f f x とするのは、すべての
計算が 代入（β-簡約）だけでうまくいくようにするため.

２のラムダ項の型がNatであることを示す。定義4.2の文法規則により確かめる。（前回の復習の範囲です）

“2”のラムダ項表現は $\lambda f^{P\to P} \lambda x^{P} (f\,(f\,x))$

fの型がP→P, xの型がPと宣言されています。

定義4.2の１より、ｆもｘもラムダ項です。それらの型はP→P,とPです。

定義4.2の３より、$(f\,x)$ は型Pのラムダ項だと分かります。

同様にこの定義の３より、(f□)の□の位置に、型がPであることが分かった$(f\,x)$ *を置いて得られる*$(f\,(f\,x))$も型Pのラムダ項であることが分かります。

定義4.2の２と今分かったこととから、 $\lambda x^{P}(f\,(f\,x))$*は、型が*P→Pのラムダ項だと分かります。

このことと、同じ定義の２から、 $\lambda f^{P\to P} \lambda x^{P}(f\,(f\,x))$*は型が*(P→P) → (P→P)のラムダ項であること、つまり型がNatのラムダ項であることが分かる。

上級者へ：　定義4.2のすぐ下にある型推論規則に従って、
これら0,1,2,3,…の型（タイプ）が確かにNat型となっていることを確かめよう（型をチェックしよう）。
この時、次の証明構造の対応が２の型チェックの過程で現れてくる。

0 に対するタイプチェックの例 (0 が Nat の証明になっていることのチェック).

$$\dfrac{\dfrac{[P]^x}{P \to P}\ {\to}\text{-}I_x}{Nat(\equiv (P \to P) \to (P \to P))}\ {\to}\text{-}I_f$$

2 に対するタイプチェックの例 (2 が Nat の証明になっていることのチェック).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P \to P]^f \qquad \dfrac{[P \to P]^f \quad [P]^x}{P}\ {\to}E}{P}\ {\to}\text{-}E}{P \to P}\ {\to}\text{-}I_x}{Nat(\equiv (P \to P) \to (P \to P))}\ {\to}\text{-}I_f$$

これら0,1,2,3,…の型（タイプ）が確かにNat型となっていることを確かめよう

0 **に対するタイプチェックの例** (0 が Nat の証明になっていることのチェック).

$$\cfrac{\cfrac{[P]^x}{P \to P}\ \to\!-I_x}{Nat(\equiv (P \to P) \to (P \to P))}\ \to\!-I_f$$

2 に対するタイプチェックの例 (2 が Nat の証明になっていることのチェック).

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[P \to P]^f \qquad \cfrac{[P \to P]^f \quad [P]^x}{P}\ \to\!E}{P}\ \to\!-E}{P \to P}\ \to\!-I_x \quad \lambda x}{Nat(\equiv (P \to P) \to (P \to P))}\ \to\!-I_f \quad \lambda f$$

束縛関係を
前は番号で示した
変項で
示すと
ラムダ項との
対応が分かりやすい

「次の数」を出力するラムダ項

定義 4.3 (Suc)

$$Suc := \lambda n^{Nat} \lambda f^{P \to P} \lambda x^{P} (f((nf)x))$$

計算の例： たとえば Suc に 3 を入力した場合の $\beta-$ 簡約による計算の過程は次のようになる．

$$\begin{aligned}
(Suc\ 3) &\equiv (\lambda n^{Nat} f^{P \to P} \lambda x^{P} (f((nf)x)) \lambda f^{P \to P} \lambda x^{P} (f(f(fx)))) \\
&\rhd \lambda f^{P \to P} \lambda x^{P} (f((\lambda f^{P \to P} \lambda x^{P} (f(f(fx)))f)x)) \\
&\rhd \lambda f^{P \to P} \lambda x^{P} (f(\lambda x^{P} (f(f(fx)))x)) \\
&\rhd \lambda f^{P \to P} \lambda x^{P} (f(f(f(fx)))) \\
&\equiv 4
\end{aligned}$$

練習問題 4.2 $(Suc\ 4)$ を計算せよ．

3 を $\lambda g^{P\to P}\lambda z^P\ g\,g\,g\,z$ と表現し直すとより分かりやすくなる.

$(n\,f)$ の β-簡約により $\lambda z\ f f f z$ となり

$(\lambda z\ f f f z\ x)$ を簡約して $f f f x$ となる.

次ページを参照

定義 4.3 (Suc)

$$Suc := \lambda n^{Nat}\lambda f^{P\to P}\lambda x^P(f((nf)x))$$

計算の例： たとえば Suc に 3 を入力した場合の $\beta-$ 簡約による計算の過程は次のようになる．

$$\begin{aligned}
(Suc\ 3) &\equiv (\lambda n^{Nat} f^{P\to P}\lambda x^P(f((nf)x))\lambda f^{P\to P}\lambda x^P(f(f(fx)))) \\
&\rhd \lambda f^{P\to P}\lambda x^P(f((\lambda f^{P\to P}\lambda x^P(f(f(fx)))f)x)) \\
&\rhd \lambda f^{P\to P}\lambda x^P(f(\lambda x^P(f(f(fx)))x)) \\
&\rhd \lambda f^{P\to P}\lambda x^P(f(f(f(fx)))) \\
&\equiv 4
\end{aligned}$$

ここに1本 f が待っている

上の3本と合わせて4本となる.

練習問題 4.2 ($Suc\ 4$) を計算せよ．

前ページの((nf)x)の部分

- 今nとして3を考える。3の表現を前ページのようい書き換えておくとする。

3は $\lambda g^{p\to p}\ \lambda z^{p}\ g\,g\,g\,z$

このとき ((n f) x) は.

$(\underbrace{(\lambda g^{p\to p}\ \lambda z^{p}\ g\,g\,g\,z\quad f)}_{\text{ここがリデックス}}\ x\ )$

β-簡約
▷
代入

$\underbrace{(\ \lambda z^{p}\ f\,f\,f\,z\quad x\ )}_{\text{ここがリデックス}}$ ▷ $f\,f\,f\,x$

β-簡約
代入

Sucのラムダ項プログラムの先頭にある λfλx で直接束縛された

次の足し算のラムダ項は、2つの数を入力すると λf λx が先頭に出て、 ggg hh 等の入力を fffff と合わせて出力します。

定義 4.4 (+)

$$+ := \lambda m^{Nat} \lambda n^{Nat} \lambda f^{P \to P} \lambda x^{P} ((mf)((nf)x))$$

計算の例：

$$\begin{array}{rcl}
3+2 & \equiv & ((+3)2) \\
 & \rhd & \lambda f^{P \to P} \lambda x^{P} ((3f)((2f)x)) \\
 & \equiv & \lambda f^{P \to P} \lambda x^{P} (\lambda x^{P} (f(f(fx)))(\underline{f}(\underline{f}x))) \\
 & \rhd\rhd & \lambda f^{P \to P} \lambda x^{P} (f(f(f(\underline{f}(\underline{f}x))))) \\
 & \equiv & 5
\end{array}$$

掛け算のラムダ項：ここで初めてβ簡約の面白い面が出てきています

$$Times := \lambda m^{Nat} \lambda n^{Nat} \lambda f^{P \to P}(m(nf))$$

このプログラム $(Times)$ のタイプが確かに $Nat \to (Nat \to Nat)$ となっていることを対応する (自然演
繹の) 証明を与えて確かめよ .

かけ算のプログラム $Times$ に 3 と 2 をインプットとして与えてプログラムを走らせた例

$$
\begin{aligned}
3\ Times\ 2 \quad & \rhd \quad \rhd \lambda f^{P \to P}(3(2f)) \\
& \rhd \quad \rhd \lambda f^{P \to P}(3 \lambda x^P (f(fx))) \\
& \equiv \quad \lambda f^{P \to P}(\lambda f^{P \to P} \lambda x^P (f(f(fx)))\, \underbrace{\lambda x^P (f(fx))}_{\equiv F}) \\
& \rhd \quad \lambda f^{P \to P} \lambda x^P (F(F(Fx))) \\
& \rhd \quad \lambda f^{P \to P} \lambda x^P (F(F(f(fx)))) \\
& \rhd \quad \lambda f^{P \to P} \lambda x^P (F(f(f(f(fx))))) \\
& \rhd \quad \lambda f^{P \to P} \lambda x^P (f(f(f(f(f(fx)))))) \\
& \equiv \quad 6
\end{aligned}
$$

データ型Bool

if-then-elseの練習問題が基本教材にあります

定義 4.5

$$
\begin{aligned}
Bool &\stackrel{def}{\equiv} Nat \to (Nat \to Nat) \\
T &\stackrel{def}{\equiv} \lambda a^{Nat} \lambda b^{Nat} a \\
F &\stackrel{def}{\equiv} \lambda a^{Nat} \lambda b^{Nat} b
\end{aligned}
$$

定義 4.6 (タイプ A のプログラム x と y に対する *if-then-else*)

$$
\text{if-then-else} := \lambda p^{Bool} \lambda x^{Nat} \lambda y^{Nat} ((px)y)
$$

真理表と同じになる論理演算子とその計算例
練習問題も基本教材にあります。

$$
\begin{aligned}
AND &\stackrel{def}{\equiv} \lambda a^{Bool}\lambda b^{Bool}\lambda m^{Nat}\lambda n^{Nat}((a((bm)n))((bn)n)) \\
OR &\stackrel{def}{\equiv} \lambda a^{Bool}\lambda b^{Bool}\lambda m^{Nat}\lambda n^{Nat}((a((bm)m))((bm)n))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T\ OR\ F &\rhd\rhd \lambda m^{Nat}\lambda n^{Nat}((T((Fm)m))((Fm)n)) \\
&\equiv \lambda m^{Nat}\lambda n^{Nat}(((\lambda c^{Nat}\lambda d^{Nat}c)((Fm)m))((Fm)n)) \\
&\rhd \lambda m^{Nat}\lambda n^{Nat}((\lambda d^{Nat}((Fm)m))((Fm)n)) \\
&\rhd \lambda m^{Nat}\lambda n^{Nat}((Fm)m) \\
&\equiv \lambda m^{Nat}\lambda n^{Nat}(((\lambda c^{Nat}d^{Nat}d)m)n) \\
&\rhd\rhd \lambda m^{Nat}\lambda n^{Nat}m \\
&\equiv T
\end{aligned}
$$