


「計算論理学」講義ノート

慶應義塾大学文学部
岡田 光弘



©2011 岡田光弘

目次

第 1 章	はじめに	3
第 2 章	論理学とは何か	5
第 3 章	命題論理	7
3.1	命題論理の形式言語	7
3.2	命題論理の意味論	9
3.3	命題論理の証明論	13
第 4 章	タイプ付ラムダ計算 (Typed λ -calculus)	29
4.1	単純タイプ付ラムダ計算	29
4.2	積タイプを持つタイプ付ラムダ計算	31
4.3	ラムダ項を用いたデータ型の定義の例 (<i>Nat</i> タイプ)	32
第 5 章	述語論理	37
5.1	述語論理の構文論	41
5.2	述語論理の意味論	46

第1章 はじめに

本稿は著者が慶應義塾大学で行なってきた講義録をまとめたものである。一般教育科目としての「論理学」のテキストとして利用されることを意図している。

『不思議の国のアリス』の著者ルイス・キャロルは、又の名をチャールズ・L・ドジソンという、19世紀後半のイギリスの論理学者でもあった。彼は著書『記号論理学』というテキストの冒頭で、新たに論理学を学ぼうとする読者に対して、いくつかの従うべき規則を提案している。このルイス・キャロルの規則は、今日でも有益なものだと思われるので、ここで簡単に彼の規則を紹介し、さらに少し解説を加えておこう。

[規則 1] Begin at the beginning. つまり「始めから始めよ」である。

時々、小説を読むのに、どんな話の結末かを確かめてから、読みはじめる、というような人を見かける。「ああ、ハッピーエンドなんだ」とか、「こいつが真犯人なのか」とか前もって確認してから、安心して小説を読み始める、というタイプの人がいる。小説の場合はそれも許されるかもしれないが、科学的な本、特に論理学の本では、そのような読み方は不可能である。一段一段、概念を積み上げていくのが論理的議論の特徴であるので、途中をスキップして読むと意味が理解できなくなる。だから、論理学の本をはじめから読む前に、中身をチラッと見てみようなどと企んで途中のページを開いてみても、結局「何が書いてあるのかわからない。どうにもこの本は難しすぎて自分の手に負えそうもない。」と悲観的になるのが常である。

[規則 2] 「完全にその章が理解できるまで、次の章に進むな。」

どんな大天才でも、途中で分からなくなったまま先に進んでは、論理学や数学等の本は理解することはできないものである。それが論理的議論の特徴である。大天才でもそうなのだから、あなたがもし単なる秀才程度なら、なおさらそうなのである。だが逆に、各ステップを一段一段理解していけば、最初には夢にも思っていなかったような高い見晴しのよい地点まで普通の人間ならだれでも到達できるのも、また論理学の特徴なのだ、ということをお忘れしないでほしい。

[規則 3] 分からない部分に出くわしたら、そこをもう一度読んでみる。それでも分からなかったら、もう一度読み直してみる。もし、三度読んでも分からなかったら、あなたの頭が疲れている可能性が強いから、そこで読むのをやめて、その日はほかのことをした方がよい。そして、ゆっくり休んでから次の日に読み直してみると、「なんだ、簡単なことじゃないか」ということになる可能性が強いのである。

次の規則は私が最も気に入っている規則である。

[規則 4] できれば、論理学が得意そうな友達をみつけて、いっしょに読むとよい。そして、難しいところを話し合いながら読み進めるとよい。話すことは、問題解決の最大の方策である。

ところで、以上のドジソンの4つの規則にもう一つ私に加えるとすると、それは次のような規則であろう。

[規則 5] 体を使って練習を充分行なうこと。即ち、頭だけを使って論理学を理解しようなどとは思わず、練習問題を実際に紙に書いて解いてみる。論理学のような知的な学問分野の習得は、純粋に頭だけを使ってなされるのであり、体を動かす必要はない、等と誤って考えられがちだが、実は論理学のような知的学問の習得は、手を動かして練習問題をくり返し解いていくことにより体で習得していく方が近道なのである。それは、運動選手の練習や、楽器の演奏家の練習や、語学学習者の練習がそうであるのとまったく同様なのである。

以上の5つの規則を守って読み進めて頂きたい。本書をとおして論理学の持つ知的な楽しさの一端でも読者に伝えることができれば、著者にとってこの上ない喜びである。

第2章 論理学とは何か

論理学は、思考の道筋を「真理 (Truth)」という概念を用いて説明する学問である。ここでは、真理と真理との関係が問題とされる。この点で論理学は、他の学問とは異なる。この違いは、研究対象の違いである。例えば、物理学は物理についての真理を、数学は数についての真理を探究する。これに対して、論理学は真理そのものを研究対象としている。つまり、「...が真であるならば ~ は真である」というような真理関係とはいかなるものかを探究しているのである。

論理学の探究の一つの方法として**真理表 (truth table)** が用いられる¹。論理学では、この方法によって “and” “not” の真理関係が次のように理解される。

A	$not\ A$
真	偽
偽	真

A	B	$A\ and\ B$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	偽
偽	偽	偽

この表で、「 A が真であるならば $not\ A$ は偽である」「 A と B が共に真であるならば、 $A\ and\ B$ は真である」等の真理関係が表現されている。

論理学では、*and*, *not*, *or*, *if...then...* などの真理関係を問題とする。これらの語の意味は、真理表によって与えられる。逆の言い方をすれば、真理表を与えることによって、我々は、*and*, *not*, *or*, *if...then...* の使い方が理解できるのである。

我々がここで定義したいのは、**記号論理学**である。これは、記号を用いて真偽を表現するものである。ここで用いられる真理関係は、我々の通常の英語とは独立に与えられるのが普通である。これは我々が、今、人工言語を定義しようとしているからである。それゆえ、混乱を防ぐため、次のような人工言語特有の記号を用いることにする。

$$\wedge, \neg, \vee, \rightarrow$$

これらの記号は、左からそれぞれ *and*, *not*, *or*, *if...then* と呼ばれ、真理表が与えられるまでは意味がない。“ \wedge ” と “ \neg ” は、我々が上で真理表によって意味を与えた *and* と *not* にあたる。(その他の記号については、まだその真理表が与えられていない。しかし、ここでは、すでにその意味があたえられているものとし、説明を続ける。) 記号論理学は、上にあげたような記号の他に、 A, B, \dots のような記号を用いる。ここで A, B は真偽がいえるような文である。そして、複雑な文がこれらの記号によって表現され、その真偽が考えられるのである。

例えば、次のような哲学の必修科目の表があるとすると。

¹ これは、ウィトゲンシュタインらによって導入された。

基礎科目	選択科目 I	選択科目 II
論理学入門	現代論理学	特殊講義 V
哲学史 I	科学の哲学	哲学研究会
哲学史 II	歴史の哲学	

ここで、履修方法として「基礎科目、選択科目 I、選択科目 II のそれぞれから少なくとも一つの授業を履修しなければならない」とする。するとこの履修規則は、次のように表現される。

1. (論理学入門が必要である \vee 哲学史 I が必要である \vee 哲学史 II が必要である)
 \wedge (現代論理学が必要である \vee 科学の哲学が必要である \vee 歴史の哲学が必要である)
 \wedge (特殊講義 V が必要である \vee 哲学研究会が必要である)

論理学の興味は、真理にある。では、1 の表現の真理はいかなるものであるのか。論理学では、この種の表現の真理は**偶然的真理**といわれる。と言うのは、この履修規則は、ある特定の大学(慶応)において、そしてある特定の年度について真とされているからである。同じような例として、“今日晴れている \rightarrow テニスをやる”がある。というのは、ある人は、晴れていたらテニスをやるかもしれないが、他の人はピンポンをやるかもしれないからである。では、偶然的ではない真理、すなわち**必然的真理**とはいかなるものであろうか。それは、次のような表現についての真理である。

2. ((今日晴れている \rightarrow テニスをやる) \wedge (\neg (テニスをやる))) \rightarrow (\neg (今日晴れている))

この表現の一部“今日晴れている \rightarrow テニスをやる”は、確かに偶然的真理ではあるが、この表現全体としては、常に真である。このような真理を**論理的真**と言う。また、次の表現は、天文学的には真かもしれないが、論理的必然性を持たない。よって、論理的真ではない。

3. UFO が存在する

しかし、次の表現は論理的真である。

4. UFO が存在する \vee (\neg (UFO が存在する))

ここで留意すべき点は、2, 4 が、“今日晴れている” “テニスをやる” “UFO が存在する” 等の文の種類のかんによらず真と言える点である。すなわち、2, 4 は、それぞれ以下の5, 6 のような形式を持ち、その形式のみで A, B の具体的な内容にかかわらず常に真といえる。このような形式的な真理を論理的真というのである。

5. $(A \rightarrow B) \wedge (\neg B) \rightarrow (\neg A)$

6. $A \vee (\neg A)$

このように記号論理学は、論理的真を探求するというその性格上、文の形式のみを問題とすることから、具体的な文を用いず、それを表わすものとして A, B 等の記号を用いる。記号論理学では、人工的に $A, B, \dots, \vee, \neg, \dots$ 等の語とそれらについての文法を導入し、そしてその意味を人工的に与える。というのは、人工言語は日常言語に比べて曖昧さがなく真偽がいえるからである。

次章では、人工言語を、言語、意味、文法の順に導入する。その上で常に真となる文(論理的に真な文)とは、いかなる形式の文であるかを探求しようと思う。

練習問題 2.1

1. “ A or B ” の真理表を、我々の日常的表現(英語)に照らし合わせて作れ。
2. “If A , then B ” の真理表を同様に作れ。

第3章 命題論理

3.1 命題論理の形式言語

命題論理の形式言語のボキャブラリーは、次のものからなる。

定義 3.1 (命題論理の形式言語のボキャブラリー)

論理記号	:	$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
命題変項	:	$P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$
命題定項	:	\top, \perp

ここで、命題変項及び命題定項は単文を表し、論理記号は文と文をつなぐ接続詞の役割を果たすことが後に示される。言語は、意味とは独立に、ただ記号のみが与えられるという形で定義される。つまり、言語は、その記号の意味が与えられるまでは無意味なものとして取り扱われる。そこで、論理記号、命題定項等の意味は後で与えることにして、ひとまず記号の意味を考えず、次のように読むことにする¹。

\wedge	...	<i>and</i>	かつ
\vee	...	<i>or</i>	または
\neg	...	<i>not</i>	非
\rightarrow	...	<i>if ... then ...</i>	ならば
\leftrightarrow	...	<i>if and only if</i>	同値
\top	...	<i>true</i>	真
\perp	...	<i>false</i>	偽

次に命題論理における論理式(又はしばしば命題とも呼ばれる)を定義する。ここで論理式とは、我々の自然言語の文にあたるものである。自然言語においてどんな言語表現が正しい文であることを示す規則は文法と呼ばれている。日本語や英語の文法に書かれているのは、正しい文を作る規則の集まりである。我々の命題論理言語では、全ての文法は下の定義に示されるようにほんの数行で書き下されてしまう。

定義 3.2 (命題論理における論理式(文法))

1. 命題変項は論理式である。
2. 命題定項は論理式である。
3. もし、 A が論理式であるならば、 $(\neg A)$ も論理式である。
4. もし、 A, B が共に論理式であるならば、 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ は、それぞれ論理式である。
5. 以上で論理式と分かるものだけを論理式とする。

¹ というものの、我々が記号を無意味なものとして取り扱うことができるのは、記号“ $A, B, \dots, \wedge, \neg, \vee, \rightarrow$ ”に関する何等かの意味をあらかじめ知っており、その上で、その「意味」をキャンセルしていることに他ならない。そうでなければ、「無意味」が何を意味しているかも理解できないはずである。

では、論理式とそうではないものを区別してみよう。まず、 $((P \wedge Q) \rightarrow T) \vee (\neg R)$ は論理式である。それは、次のことより明らかである。

- 1 より P, Q, R は論理式
- 4 より $(P \wedge Q)$ は論理式
- 2 より T は論理式
- 4 より $((P \wedge Q) \rightarrow T)$ は論理式
- 3 より $(\neg R)$ は論理式
- 4 より $((P \wedge Q) \rightarrow T) \vee (\neg R)$ は論理式

しかし、 $(\neg \leftrightarrow R) \vee \perp$ は論理式ではない。

練習問題 3.1 次の記号列が論理式であることを定義に従って示せ。

1. $(A \leftrightarrow T)$
2. $((\neg(A \wedge B)) \rightarrow B)$
3. $(T \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \vee A))$

なお括弧は、すべてつけると論理式が繁雑になるので、混乱を防ぐために最小限用いる。括弧は、論理記号と命題記号との結び付きの強さに応じて省略する。また一般に、一番外側の括弧は省略する。命題記号との結びつきは \neg がもっとも強く、次に \wedge および \vee 、もっとも弱いのが \rightarrow および \leftrightarrow である。

例えば、次の論理式 $\neg P \wedge Q$ は、 $\neg(P \wedge Q)$ ではなく $(\neg P) \wedge Q$ を意味する。と言うのは、 \neg が \wedge よりも命題 P に対する結び付きが強いからである。また $\neg P \rightarrow R \wedge Q$ は、 $\neg(P \rightarrow (R \wedge Q))$ や $\neg(P \rightarrow R) \wedge Q$ でなく、 $(\neg P) \rightarrow (R \wedge Q)$ を意味する。というのは、 \neg 、 \wedge が \rightarrow よりも結合力が強いからである。他方、 $(P \vee R) \wedge Q$ は、 $P \vee R \wedge Q$ とは省略できない。これは、 \vee と \wedge の結合力が等しいため、 $P \vee (R \wedge Q)$ との区別が付かないからである。

括弧の省略規則

1. 一番外側の括弧は原則として常に省略する。
2. 次の結び付きの大小関係 $<$ に従って結び付きの関係が明かな括弧は省略する。

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & & \wedge & & \neg & & \\ < & & < & & & & \\ \leftrightarrow & & \vee & & & & \end{array}$$

では、 $((P \wedge Q) \rightarrow T) \vee (\neg R)$ の括弧を実際に外してみよう。まず $(P \wedge Q) \rightarrow T$ が $P \wedge Q \rightarrow T$ に省略され、 $(P \wedge Q \rightarrow T) \vee (\neg R)$ となる。これは、 \wedge の方が \rightarrow よりも Q に対する結び付きが強いからである。そして、 $(P \wedge Q \rightarrow T) \vee \neg R$ となる。しかし、最後の括弧を取り除いて $P \wedge Q \rightarrow T \vee \neg R$ としてしまうと、 \vee が \rightarrow よりも強い結合力をもつから、この論理式は $(P \wedge Q) \rightarrow (T \vee \neg R)$ を意味することになってしまう。

練習問題 3.2 次の論理式の括弧をできるかぎり省略せよ。

1. $(\neg(\neg(\neg\perp)))$
2. $((\neg(A \vee B)) \rightarrow (\neg B))$
3. $((\neg(A \vee B)) \rightarrow (A \wedge (\neg B))) \rightarrow (B \rightarrow \perp)$

3.2 命題論理の意味論

命題論理の対象である論理式は、真又は偽という真理値を持つ。上で与えられた命題論理の言語には、この真理値をもとにした次のような意味が与えられる²。

定義 3.3 (論理式の真理値)

1. 命題定項 \top は、真 (*true*) という真理値を常に持つ。すなわち、論理式 \top の意味は、真 (*true*) である。
2. 命題定項 \perp は、偽 (*false*) という真理値を常に持つ。すなわち、論理式 \perp の意味は、偽 (*false*) である。
3. 命題変項 P は、真 (*true*) 及び偽 (*false*) を値として取り得る変項である。
4. $A \wedge B$ の形の論理式が真 (*true*) であるのは、 A が真 (*true*) でかつ B が真 (*true*) である時にかぎる。
5. $A \vee B$ の形の論理式が真 (*true*) であるのは、 A が真 (*true*) であるか又は B が真 (*true*) である時 (両方真である時も含めて) にかぎる。
6. $\neg A$ の形の論理式が真 (*true*) であるのは、 A が偽 (*false*) である時 (即ち A が真でない時) にかぎる。
7. $A \rightarrow B$ の形の論理式が真 (*true*) であるのは、 A が真 (*true*) であれば B も真 (*true*) であること、即ち、 A が偽 (*false*) であるか B が真 (*true*) となることである。
8. $A \leftrightarrow B$ の形の論理式が真 (*true*) であるのは、 A と B が同じ真理値をとる時にかぎる。

特に、4~8 は、論理記号の意味を真偽概念を使って定義したものであると言える。ここで注意を要するのは、ここで与えた論理記号の意味と日常言語における対応する接続詞等の意味とが必ずしも常に一致しているとは限らない、ということである。日常言語においては、言葉の意味を曖昧に用いている場合がよくある。この曖昧さが日常言語を用いて論理的分析をする際の困難のもとになっている。ここに論理的分析に適した人工言語を考える動機がある。そして、この人工言語の上で曖昧さのない言葉の意味を与えておいて、その上でこのフレームワークを用いて論理的分析を行おうとするのである。

さて、今、真 (*true*) を t 、偽 (*false*) を f と表す。上で与えられた意味付与は、次のような真理表で表すことができる。

1. \top はつねに値 t をもつ

$$\frac{\top}{t}$$

2. \perp はつねに値 f をもつ

$$\frac{\perp}{f}$$

3. P は値 t または f をもつ

$$\frac{P}{t}$$

$$f$$

- 4.

² 命題論理における意味は、真 (*true*)、偽 (*false*) のみである。

A	B	$A \wedge B$	
t	t	t	A が t , B が t なら $A \wedge B$ も t
t	f	f	A が t , B が f なら $A \wedge B$ は f
f	t	f	A が f , B が t なら $A \wedge B$ は f
f	f	f	A が f , B が f なら $A \wedge B$ は f

5.

A	B	$A \vee B$	
t	t	t	A が t , B が t なら $A \vee B$ も t
t	f	t	A が t , B が f なら $A \vee B$ は t
f	t	t	A が f , B が t なら $A \vee B$ は t
f	f	f	A が f , B が f なら $A \vee B$ は f

6.

A	$\neg A$	
t	f	A が t なら $\neg A$ は f
f	t	A が f なら $\neg A$ は t

7.

A	B	$A \rightarrow B$	
t	t	t	A が t , B が t なら $A \rightarrow B$ は t
t	f	f	A が t , B が f なら $A \rightarrow B$ は f
f	t	t	A が f , B が t なら $A \rightarrow B$ は t
f	f	t	A が f , B が f なら $A \rightarrow B$ は t

8.

A	B	$A \leftrightarrow B$	
t	t	t	A が t , B が t なら $A \leftrightarrow B$ は t
t	f	f	A が t , B が f なら $A \leftrightarrow B$ は f
f	t	f	A が f , B が t なら $A \leftrightarrow B$ は f
f	f	t	A が f , B が f なら $A \leftrightarrow B$ は t

以上のような意味付与規則をもとにこれらを組み合わせることにより、任意の論理式に対して真理値を与えることができる。その例をいくつか挙げる。

例 3.1

$$(1) P \wedge Q \rightarrow \neg P$$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$P \wedge Q \rightarrow \neg P$
t	t	t	f	f
t	f	f	f	t
f	t	f	t	t
f	f	f	t	t

$$(2) R \rightarrow \perp \vee Q$$

\perp	Q	R	$\perp \vee Q$	$R \rightarrow \perp \vee Q$
f	t	t	t	t
f	t	f	t	t
f	f	t	f	f
f	f	f	f	t

(3) $R \rightarrow P \vee Q$

P	Q	R	$P \vee Q$	$R \rightarrow P \vee Q$
t	t	t	t	t
t	t	f	t	t
t	f	t	t	t
t	f	f	t	t
f	t	t	t	t
f	t	f	t	t
f	f	t	f	f
f	f	f	f	t

上の7による $A \rightarrow B$ の真理表は, 次の $\neg A \vee B$ の真理表と結果が同じになることが分かる.

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
t	t	f	t
t	f	f	f
f	t	t	t
f	f	t	t

この意味で, \rightarrow は \neg と \vee を使って $A \rightarrow B$ を $\neg A \vee B$ の形で定義可能であることが分かる.

定義 3.4 (トートロジー) すべての命題変項の可能な真理値に対して, 常に真となるような論理式はトートロジーと呼ばれる.

次にトートロジーの例を示す.

例 3.2

1. $A \vee \neg A$	A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
	t	f	t
	f	t	t

2. $A \rightarrow A$	A	$A \rightarrow A$
	t	t
	f	t

3. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
t	t	t	f	f	f	f	t
t	f	f	t	f	t	t	t
f	t	f	t	t	f	t	t
f	f	f	t	t	t	t	t

4. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
t	t	t	f	t	t
t	f	f	f	f	t
f	t	t	t	t	t
f	f	t	t	t	t

練習問題 3.3 次の論理式がトートロジーであることを示せ.

1. $A \leftrightarrow (\neg\neg A)$
2. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
3. $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \vee A$
4. $(\neg A \rightarrow (A \wedge \neg B)) \rightarrow A$

練習問題 3.4 次の論理式がトートロジーであるかどうか判定せよ.

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
2. $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$
3. $(A \vee B) \rightarrow A$
4. $B \rightarrow (A \wedge B)$
5. $A \rightarrow (A \vee B)$
6. $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$
7. $(A \wedge (A \wedge B)) \leftrightarrow A$
8. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$
9. $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

練習問題 3.5 1. $A \leftrightarrow B$ が \rightarrow と \wedge を用いて, $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ と定義できることを示せ.

2. $A \wedge B$ が \vee と \neg を用いて $\neg(\neg A \vee \neg B)$ と定義できることを示せ.
3. $A \vee B$ が \wedge と \neg を用いて $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ と定義できることを示せ.

例 3.3 次のことが成立する.

1. A, B が t なら $A \wedge B$ も t .
2. $A \wedge B$ が t なら A は t .
 $A \wedge B$ が t なら B は t .
3. $A \rightarrow B$ が t で A も t なら B は t .
4. A が t なら $A \vee B$ は t .
 B が t なら $A \vee B$ は t .

A	B	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \vee B$
t	t	t	t	t
t	f	f	f	t
f	t	f	t	t
f	f	f	t	f

これらは真理表により示すことができる.

3.3 命題論理の証明論

先に我々が導入した命題論理の形式言語は、命題変項 $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$ 、命題定項 \top, \perp 、そして論理記号 $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ から成っていた。そして、そこでは $P, Q, R, P \wedge Q, \neg R, (P \wedge Q) \rightarrow R, \dots$ 等の記号列が論理式として用いられていた。論理式とは通常、自然言語の文に対応するものであった。一方、自然言語においては複数の文から文章が構成される。本節では、命題論理言語に対する文章を考える。ここで論理的言語における文章とは論証のことである。論証のことを論理学では**証明**とも呼ぶ。一つの証明は多くの文（論理式）から成る。証明において、各論理式は論理的推論規則に従って導入される。論理的推論規則に従って次々に論理式が生成されることを通して証明と呼ばれる論理的文章が構成されるわけである。この論理的形式言語上での証明概念は、通常、日常言語で行われている論証の論理構造を抽象的に表したものだと考えられる。

任意の論理式 A, B_1, \dots, B_n に対して、**開いた前提 B_1, \dots, B_n を持つ A の証明構造** という概念を定義する。ここで「 P が開いた前提 B_1, \dots, B_n を持つ A の証明構造である」とは、内容的には「 P は B_1, \dots, B_n という前提から A という帰結を導く論証である」ことを表す。ここで、 B_1, \dots, B_n には、同じ形の論理式が重複して現れる場合を含むこととする。実際、下の証明構造の定義から明らかになるように、開いた前提 B_i と B_j (ただし $i \neq j$) とが論理式としてはまったく同じ形をしているとしても、それらは考えている証明構造の中で異なる場所 (位置) に現れているのであり、よって現れる場所 (位置) をも含めて論理式を同定することになると、 B_i と B_j とは「異なる」と考えられるのである。以下において、**開いた前提の集合** と呼ぶときは、このように違った位置に現れる 2 つの同形の論理式をこの集合の異なる要素として取り扱うこととする。

命題論理の自然演繹体系

定義 3.5 (自然演繹体系 NK の証明構造) 証明構造とは次のような構造のことと定義する。

0. **公理**：任意の論理式 A はそれ自体が A の証明構造である。このときその論理式 A 自体はこの証明構造の**開いた前提**であると言われる。ここで、この 1 つの論理式だけから成る証明構造の開いた前提の集合は、この論理式 A だけから成る一元集合 (1 つの元のみからなる集合) である。
1. **\wedge -導入規則 (\wedge -I と略記)**：今、次のような A の証明構造 P_1 と B の証明構造 P_2 が与えられているとする。ここで $C_1 \dots C_n$ は A の証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とし、 $D_1 \dots D_m$ は B の証明構造 P_2 に現れる開いた前提の集合とする。

$$P_1 \left\{ \begin{array}{c} C_1 \dots C_n \\ \vdots \\ A \end{array} \right. \quad P_2 \left\{ \begin{array}{c} D_1 \dots D_m \\ \vdots \\ B \end{array} \right.$$

このとき、この 2 つの証明構造 P_1, P_2 に次の形の \wedge -I 規則を適用して得られる構造 P は $A \wedge B$ の証明構造である。

$$P \left\{ \begin{array}{cc} C_1 \dots C_n & D_1 \dots D_m \\ \vdots & \vdots \\ A & B \\ \hline A \wedge B & \wedge\text{-I} \end{array} \right.$$

ここで、 $A \wedge B$ の証明構造 P の開いた前提の集合は、 P_1 の開いた前提の集合 C_1, \dots, C_n と P_2 の開いた前提の集合 D_1, \dots, D_m の和集合 $C_1, \dots, C_n, D_1, \dots, D_m$ のこととする。

2. \wedge -消去規則 (左) (\wedge -E(左) と略記) : 今, 次のような $A \wedge B$ の証明構造 P_1 が与えられているとする. ここで C_1, \dots, C_n は証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とする.

$$P_1 \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ \vdots \\ A \wedge B \end{array} \right.$$

このとき, この証明構造 P_1 に次の形の \wedge -E(左) 規則を適用して得られる構造 P は A の証明構造である.

$$P \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{A \wedge B}{A} \wedge\text{-E(左)} \end{array} \right.$$

ここで, A の証明構造 P の開いた前提の集合は P_1 の開いた前提の集合 C_1, \dots, C_n のこととする.

3. \wedge -消去規則 (右) (\wedge -E(右) と略記) : 今, 次のような $A \wedge B$ の証明構造 P_1 が与えられているとする. ここで $C_1 \cdots C_n$ は証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とする.

$$P_1 \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ \vdots \\ A \wedge B \end{array} \right.$$

このとき, この証明構造 P_1 に次の形の \wedge -E 規則 (右) を適用して得られる構造 P は B の証明構造である.

$$P \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{A \wedge B}{B} \wedge\text{-E(右)} \end{array} \right.$$

ここで, B の証明構造 P の開いた前提の集合は P_1 の開いた前提の集合 C_1, \dots, C_n のこととする.

4. \rightarrow -導入規則 (\rightarrow -I と略記) : 今, 次のような B の証明構造 P_1 が与えられているとする. ここで $A, A, \dots, A, C_1, \dots, C_n$ は B の証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合 (の適当な順番による枚挙) とする. 特に $A, A, \dots, A, C_1, \dots, C_n$ における最初の A, A, \dots, A は論理式 A の (開いた前提としての) 現れのうちのいくつかを指定したものであるとする.

$$P_1 \left\{ \begin{array}{c} A \ A \cdots A \ C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ \vdots \\ B \end{array} \right.$$

この証明構造に次の形の \rightarrow -I 規則を適用し, 上で指定した開いた前提 A, \dots, A にカギカッコを付けて “[A]” として得られた構造 P は $A \rightarrow B$ の証明構造である.

$$P \left\{ \begin{array}{c} [A] \ [A] \cdots [A] \ C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{B}{A \rightarrow B} \rightarrow\text{-I} \end{array} \right.$$

ここで、 $A \rightarrow B$ の証明構造 P の開いた前提の集合は C_1, \dots, C_n とする。又、 P_1 の中で開いた前提として現れていた論理式 A, \dots, A にカギカッコを付けたもの “[A]...[A]” は、この $\rightarrow -I$ 規則により (証明構造 P で) **閉じられた前提** と呼ばれる。特にこの証明構造 P_1 の開いた前提の集合の中に A の形の論理式が (複数) 現れていてもよい。又、[A]...[A] が空列のとき (即ち、この $\rightarrow -I$ 規則で閉じる前提が 1 つもない場合) も、特別な場合として含めることとする。

従って、証明構造 P の開いた前提は

$$(P \text{ の開いた前提の集合}) = (P_1 \text{ の開いた前提の集合}) - (\text{新たにカギカッコが付いた } A \text{ の集合})$$

として与えられることとなる。なお、開いた前提のことを**仮定**とも呼ぶ。

5. $\rightarrow -$ 消去規則 ($\rightarrow -E$ と略記) : 今、次のような A の証明構造 P_1 と、 $A \rightarrow B$ の証明構造 P_2 が与えられているとする。ここで C_1, \dots, C_n は A の証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とし、 D_1, \dots, D_m は $A \rightarrow B$ の証明構造 P_2 に現れる開いた前提の集合とする。

$$P_1 \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ A \end{array} \right. \quad P_2 \left\{ \begin{array}{c} D_1 \cdots D_m \\ \vdots \\ A \rightarrow B \end{array} \right.$$

このとき、この 2 つの証明構造に次の形の $\rightarrow -E$ 規則を適用した構造 P も証明構造である。

$$P \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \quad D_1 \cdots D_m \\ \vdots \quad \vdots \\ A \quad A \rightarrow B \\ \hline B \end{array} \right. \rightarrow -E$$

ここで、証明構造 P の開いた前提の集合は P_1 の開いた前提の集合 C_1, \dots, C_n と P_2 の開いた前提の集合 D_1, \dots, D_m の和集合 $C_1, \dots, C_n, D_1, \dots, D_m$ であるとする。

6. $\neg -$ 導入規則 ($\neg -I$ と略記) : 今、次のような論理定項 \perp の証明構造 P_1 が与えられているとする。ここで $A, A, \dots, A, B_1, \dots, B_n$ は論理定項 \perp の証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合 (の適当な順番による枚挙) とする。特に $A, A, \dots, A, B_1, \dots, B_n$ における最初の A, A, \dots, A は論理式の (開いた前提としての) 現れのうちのいくつかを指定したものであるとする。

$$P_1 \left\{ \begin{array}{c} A \ A \cdots A \ B_1 \cdots B_n \\ \vdots \\ \perp \end{array} \right.$$

ここで、この証明構造 P_1 に次の形の $\neg -I$ 規則を適用し、上で指定した開いた前提 A, \dots, A にカギカッコを付けて ($\rightarrow -I$ 規則と同様の操作により) 前提を閉ざして得られる構造 P は $\neg A$ の証明構造である。

$$P \left\{ \begin{array}{c} [A] \ [A] \cdots [A] \ B_1 \cdots B_n \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \neg A \end{array} \right. \neg -I$$

ここで、証明構造 P の開いた前提の集合は P_1 の開いた前提の集合 $A, A, \dots, A, B_1, \dots, B_n$ から \neg -I 規則により閉ざされた前提の集合 A, A, \dots, A を除いて得られる集合であるとする。又、 \rightarrow -I 規則に時と同様に、 B_1, \dots, B_n に論理式 A が現れる場合、及び上で指定した A, \dots, A が空列である場合も含むこととする。

7. \neg -消去規則 (\neg -E と略記) : 今、次のような A の証明構造 P_1 と $\neg A$ の証明構造 P_2 が与えられているとする。ここで C_1, \dots, C_n は A の証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とし、 D_1, \dots, D_m は $\neg A$ の証明構造 P_2 の証明構造 P_2 に現れる開いた前提の集合とする。

$$P_1 \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ A \end{array} \right. \quad P_2 \left\{ \begin{array}{c} D_1 \cdots D_m \\ \vdots \\ \neg A \end{array} \right.$$

この2つの証明構造 P_1, P_2 に次の形の \neg -E 規則を適用して得られた P も証明構造である。

$$P \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \quad D_1 \cdots D_m \\ \vdots \quad \vdots \\ \frac{A \quad \neg A}{\perp} \quad \neg\text{-E} \end{array} \right.$$

ここで P の開いた前提の集合は、 P_1 の開いた前提の集合 C_1, \dots, C_n と P_2 の開いた前提の集合 D_1, \dots, D_m の和集合 $C_1, \dots, C_n, D_1, \dots, D_m$ であるとする。

8. \vee -導入規則 (左) (\vee -I(左) と略記) : 今、次のような A の証明構造 P_1 が与えられているとする。ここで C_1, \dots, C_n は証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とする。

$$P_1 \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ A \end{array} \right.$$

この証明構造 P_1 に次の形の \vee -I(左) 規則を適用した構造 P は $A \vee B$ の証明構造である。

$$P \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ \frac{A}{A \vee B} \quad \vee\text{-I(左)} \end{array} \right.$$

ここで、 $A \vee B$ の証明構造 P の開いた前提の集合は、 P_1 の開いた前提の集合 C_1, \dots, C_n であるとする。

9. \vee -導入規則 (右) (\vee -I(右) と略記) : 今、次のような B の証明構造 P_1 が与えられているとする。ここで C_1, \dots, C_n は証明構造 P_1 に現れる開いた前提の集合とする。

$$P_1 \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ B \end{array} \right.$$

この証明構造 P_1 に次の形の \vee -I(右) 規則を適用した構造 P は $A \vee B$ の証明構造である。

$$P \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ B \\ \hline A \vee B \end{array} \right. \vee\text{-I(右)}$$

ここで、 $A \vee B$ の証明構造 P の開いた前提の集合は、 P_1 の開いた前提の集合 C_1, \dots, C_n であるとする。

10. \vee -消去規則 (\vee -E と略記)：今、次のような3つの証明構造が与えられているとする。

- (1) $A \vee B$ の証明構造 P_1
- (2) C の証明構造 P_2
- (3) C の証明構造 P_3

$$\begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \\ P_1 \left\{ \begin{array}{c} D_1 \cdots D_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A \vee B \end{array} \right. & P_2 \left\{ \begin{array}{c} A \ A \cdots A \ E_1 \cdots E_m \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ C \end{array} \right. & P_3 \left\{ \begin{array}{c} B \ B \cdots B \ G_1 \cdots G_l \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ C \end{array} \right. \end{array}$$

ここで $A, A, \dots, A, E_1, \dots, E_m$ は証明構造 P_2 に現れる開いた前提の集合とし、 $B, B, \dots, B, G_1, \dots, G_l$ は証明構造 P_3 に現れる開いた前提の集合とする。特に $A, A, \dots, A, E_1, \dots, E_m$ における最初の A, A, \dots, A 及び $B, B, \dots, B, G_1, \dots, G_l$ における最初の B, B, \dots, B は、それぞれ論理式 A 及び B の (開いた前提としての) 現れのうちのいくつかを指定したものであるとする。

このとき、これら3つの証明構造 P_1, P_2, P_3 に次の形の \vee -E 規則を適用し、 P_2 の開いた前提として現れる論理式 A 及び P_3 の開いた前提として現れる論理式 B のうちの上で指定されたものをそれぞれカギカッコでくくって “[A]”, “[B]” として得られる構造 P は C の証明構造である。

$$P \left\{ \begin{array}{c} D_1 \cdots D_n \quad [A] [A] \cdots [A] \ E_1 \cdots E_m \quad [B] [B] \cdots [B] \ G_1 \cdots G_l \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A \vee B \quad C \quad C \\ \hline C \end{array} \right. \vee\text{-E}$$

ここで、証明構造 P の開いた前提の集合は、 P_1, P_2 及び P_3 の開いた前提の集合の和集合から \vee -E 規則により閉ざされた前提の集合を取り除いたものであるとする。又、 \rightarrow -I 規則や \neg -I 規則の時と同様に、 E_1, \dots, E_m に論理式 A が現れる場合や G_1, \dots, G_l に論理式 B が現れる場合、及び上で指定した A, \dots, A や B, \dots, B がそれぞれ空列である場合も含むこととする。

11. \perp -消去規則 (\perp -E と略記)：今、次のような論理定項 \perp の証明構造 P_1 が与えられているとする。ここで C_1, \dots, C_n は \perp の証明構造に現れる開いた前提の集合とする。

$$P_1 \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \perp \end{array} \right.$$

この証明構造 P_1 に次の形の \perp -E 規則を適用した構造 P は A の証明構造である。ただし A は任意の論理式とする。

$$P \left\{ \begin{array}{l} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ \perp \\ \hline A \quad \perp\text{-E} \end{array} \right.$$

ここで、 P の開いた前提の集合は P_1 の開いた前提の集合 C_1, \dots, C_n であるとする。

12. $\neg\neg$ -消去規則 ($\neg\neg$ -E と略記) : 今、次のような $\neg\neg A$ の証明構造 P_1 が与えられているとする。ここで C_1, \dots, C_n は、 P_1 に現れる開いた前提の集合とする。

$$P_1 \left\{ \begin{array}{l} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ \neg\neg A \end{array} \right.$$

この証明構造 P_1 に次の形の $\neg\neg$ -E 規則を適用した構造 P も証明構造である。

$$P \left\{ \begin{array}{l} C_1 \cdots C_n \\ \vdots \\ \neg\neg A \\ \hline A \quad \neg\neg\text{-E} \end{array} \right.$$

ここで、 P の開いた前提の集合は P_1 の開いた前提の集合 C_1, \dots, C_n であるとする。

定義 3.6 (証明) 開いた前提が1つも現れない A の証明構造は A の証明と呼ばれる。

証明構造という概念が(開いた)前提のもとで終論理式が証明できることを表しているのに対し、証明概念は何の前提も仮定することなく終論理式が証明できることを表している。

ここで上の証明構造の定義に現れた推論規則を列挙し、又その直観的な内容を与えると次の通りとなる。

命題論理の推論規則

1. \wedge -I : 2つの論理式 A と B から論理式 $A \wedge B$ を推論してよい。これを次のように表記することとする。

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge\text{-I}$$

- 2, 3. \wedge -E : 論理式 $A \wedge B$ から A を推論してよい。これを次のように表記することとする。

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge\text{-E} \quad \text{又は} \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge\text{-E}$$

4. \rightarrow -I : A という前提を用いて B へ至る証明が与えられれば、 A という仮定を用いることなしに論理式 $A \rightarrow B$ を推論してよい。

$$\frac{\begin{array}{c} [A]^n \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow\text{-I}, n$$

5. \rightarrow -E : 論理式 A と論理式 $A \rightarrow B$ から論理式 B を推論してよい。

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \rightarrow\text{-E}$$

6. $\neg\text{-I}$: A という主張から \perp (false) が主張されれば、即ち A から矛盾が主張されれば、 A という仮定なしに $\neg A$ (非 A) が主張できる。

$$\frac{\begin{array}{c} [A]^n \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \neg\text{-I},n$$

7. $\neg\text{-E}$: A と $\neg A$ が同時に主張されれば、 \perp 、即ち矛盾であることが主張される。

$$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \neg\text{-E}$$

- 8, 9. $\vee\text{-I}$: 論理式 A (又は B) から $A \vee B$ を推論してよい。

$$\frac{A}{A \vee B} \vee\text{-I} \quad \text{又は} \quad \frac{B}{A \vee B} \vee\text{-I}$$

10. $\vee\text{-E}$: $A \vee B$ が既に主張され、また、 A という仮定からも、 B という仮定からも同じ C が主張できるときには、 C が主張できる。

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} [A]^n \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B]^n \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \vee\text{-E},n$$

11. $\perp\text{-E}$: \perp (矛盾) が主張されれば、任意の A が主張できる。

$$\frac{\perp}{A} \perp\text{-E}$$

12. $\neg\neg\text{-E}$: $\neg\neg A$ が主張されれば、 A が主張される。

$$\frac{\neg\neg A}{A} \neg\neg\text{-E}$$

定義 3.7 (証明可能) 論理式 A を終論理式とする証明が存在するとき、 A は証明可能であると言うことにする。また、仮定 B_1, \dots, B_n から A が推論規則にしたがって主張できる時、仮定 B_1, \dots, B_n から A は証明可能であると言う。

ここでいくつかの例を挙げる。

例 3.4 (証明) $\wedge\text{-I}$ および $\wedge\text{-E}$ を使うもの

1. 前提 $A \wedge B$ から $B \wedge A$ という帰結に至る証明。

$$\frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge\text{-E} \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge\text{-E}}{B \wedge A} \wedge\text{-I}$$

2. 前提 $(A \wedge B) \wedge C$ から $B \wedge (C \wedge A)$ に至る証明.

$$\frac{\frac{\frac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge B} \wedge\text{-E} \quad \frac{(A \wedge B) \wedge C}{C} \wedge\text{-E} \quad \frac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge B} \wedge\text{-E}}{A} \wedge\text{-E} \quad \frac{C \wedge A}{C \wedge A} \wedge\text{-I}}{B \wedge (C \wedge A)} \wedge\text{-I}$$

練習問題 3.6 次の証明を示せ.

1. 前提 $A \wedge (B \wedge C)$ から $(A \wedge B) \wedge C$ に至る証明.

例 3.5 (証明) $\rightarrow\text{-I}$, $\rightarrow\text{-E}$ を使うもの

1. $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$

$$\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge\text{-E} \quad \frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge\text{-E}}{\frac{B \wedge A}{A \wedge B \rightarrow B \wedge A} \rightarrow\text{-I,1}}$$

2. $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$

$$\frac{\frac{[A \wedge (A \rightarrow B)]^1}{A} \wedge\text{-E} \quad \frac{[A \wedge (A \rightarrow B)]^1}{A \rightarrow B} \wedge\text{-E}}{\frac{B}{(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B} \rightarrow\text{-I,1}}$$

3. $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$

$$\frac{\frac{[A]^2 \quad [B]^1}{A \wedge B} \wedge\text{-I} \quad \frac{[A \wedge B \rightarrow C]^3}{C} \rightarrow\text{-E}}{\frac{\frac{B \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C)} \rightarrow\text{-I,1}}{A \rightarrow (B \rightarrow C)} \rightarrow\text{-I,2}} \rightarrow\text{-I,3}$$

練習問題 3.7 次の証明を示せ.

1. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$

2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \wedge A \rightarrow (B \rightarrow C)$

3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

例 3.6 (証明) $\neg\text{-I}$, $\neg\text{-E}$ を使うもの

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

$$\frac{\frac{[A]^1 \quad [A \rightarrow B]^2}{B} \rightarrow\text{-}E \quad [\neg B]^3}{\frac{\perp}{\neg A} \rightarrow\text{-}I,1} \rightarrow\text{-}E}{\frac{\neg B \rightarrow \neg A}{(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)} \rightarrow\text{-}I,3} \rightarrow\text{-}I,2$$

2. $A \rightarrow (\neg\neg A)$

$$\frac{[A]^2 \quad [\neg A]^1}{\frac{\perp}{\neg\neg A} \rightarrow\text{-}I,1} \rightarrow\text{-}E}{A \rightarrow \neg\neg A} \rightarrow\text{-}I,2$$

練習問題 3.8 次の証明を示せ.

1. $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$
2. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg(A \wedge B)$

例 3.7 (証明) $\vee\text{-}I$, $\vee\text{-}E$ を使うもの

1. $A \vee B \rightarrow B \vee A$

$$\frac{[A \vee B]^2 \quad \frac{[A]^1}{B \vee A} \vee\text{-}I \quad \frac{[B]^1}{B \vee A} \vee\text{-}I}{\frac{B \vee A}{A \vee B \rightarrow B \vee A} \rightarrow\text{-}I,2} \vee\text{-}E,1$$

2. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$

$$\frac{[A \vee B]^2 \quad \frac{[A]^1 \quad \frac{[(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)]^3}{A \rightarrow C} \wedge\text{-}E}{C} \rightarrow\text{-}E \quad \frac{[B]^1 \quad \frac{[(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)]^3}{B \rightarrow C} \wedge\text{-}E}{C} \rightarrow\text{-}E}{\frac{C}{(A \vee B \rightarrow C)} \rightarrow\text{-}I,2} \vee\text{-}E,1}{(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)} \rightarrow\text{-}I,3$$

3. $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$

$$\frac{[A \vee B]^2 \quad \frac{[A]^1 \quad \frac{[\neg A \wedge \neg B]^3}{\neg A} \wedge\text{-}E}{\perp} \rightarrow\text{-}E \quad \frac{[B]^1 \quad \frac{[\neg A \wedge \neg B]^3}{\neg B} \wedge\text{-}E}{\perp} \rightarrow\text{-}E}{\frac{\perp}{\neg(A \vee B)} \rightarrow\text{-}I,2} \vee\text{-}E,1}{(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)} \rightarrow\text{-}I,3$$

4. $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$$\frac{\frac{\frac{[A]^1}{A \vee B} \vee\text{-I} \quad [\neg(A \vee B)]^3}{\neg A} \neg\text{-I,1} \quad \neg\text{-E} \quad \frac{\frac{\frac{[B]^2}{A \vee B} \vee\text{-I} \quad [\neg(A \vee B)]^3}{\neg B} \neg\text{-I,2} \quad \wedge\text{-I}}{\neg A \wedge \neg B} \wedge\text{-I} \quad \neg\text{-E}}{\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)} \rightarrow\text{-I,3}$$

練習問題 3.9 次の証明を示せ.

1. $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$
2. $(A \vee B) \vee C \rightarrow B \vee (C \vee A)$
3. $(A \wedge B) \vee C \rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
4. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee C$

例 3.8 (証明) $\perp\text{-E}$ を使うもの

1. $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

$$\frac{\frac{\frac{[A]^2 \quad [\neg A]^1}{\neg A \vee B} \vee\text{-E} \quad \frac{\perp}{B} \perp\text{-E}}{B} \vee\text{-E,1} \quad \frac{B}{A \rightarrow B} \rightarrow\text{-I,2}}{(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)} \rightarrow\text{-I,3}$$

2. $((A \vee B) \wedge \neg B) \rightarrow A$

$$\frac{\frac{\frac{[(A \vee B) \wedge \neg B]^2}{A \vee B} \wedge\text{-E} \quad [A]^1 \quad \frac{\frac{[(A \vee B) \wedge \neg B]^2}{\neg B} \wedge\text{-E} \quad [B]^1}{\perp} \perp\text{-E}}{A} \vee\text{-E,1} \quad \frac{A}{((A \vee B) \wedge \neg B) \rightarrow A} \rightarrow\text{-I,2}}{((A \vee B) \wedge \neg B) \rightarrow A} \rightarrow\text{-I,2}$$

練習問題 3.10 次の証明を示せ.

1. $((A \vee \neg B) \wedge B) \rightarrow A$

例 3.9 (証明) $\neg\neg\text{-E}$ を使うもの

1. $(\neg\neg A) \rightarrow A$

$$\frac{\frac{[\neg\neg A]^1}{A} \neg\neg\text{-E}}{\neg\neg A \rightarrow A} \rightarrow\text{-I,1}$$

2. $A \vee \neg A$

$$\frac{\frac{\frac{[A]^1}{A \vee \neg A} \vee\text{-I} \quad [\neg(A \vee \neg A)]^2}{\perp} \neg\text{-E}}{\frac{\frac{\perp}{\neg A} \neg\text{-I,1}}{A \vee \neg A} \vee\text{-I} \quad [\neg(A \vee \neg A)]^2}{\perp} \neg\text{-E}}{\frac{\frac{\perp}{\neg\neg(A \vee \neg A)} \neg\text{-I,2}}{A \vee \neg A} \neg\text{-E}}$$

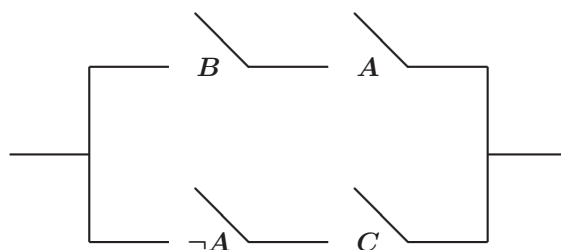
練習問題 3.11 次の証明を示せ.

1. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
2. $(\neg A \rightarrow (A \wedge \neg B)) \rightarrow A$

練習問題 3.12 次の論理式が証明可能であることを示せ.

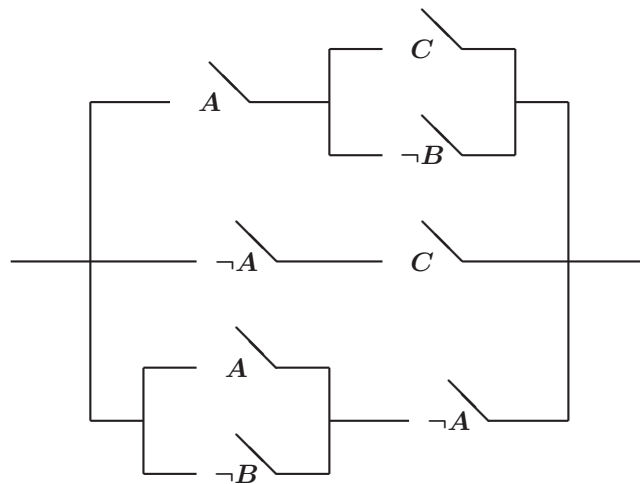
1. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow \neg A$
2. $A \rightarrow (B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B))$
3. $A \wedge B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$
4. $(A \vee B) \wedge C \rightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
5. $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \vee B) \wedge C$
6. $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
7. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$

練習問題 3.13 次のような電器回路を考えることにする. ここで A, B, C, \dots 等の原始論理式は on-off スイッチを表わしているものとする. on-off スイッチとはそのスイッチの場所で電源をオン (流す) かオフ (止める) かのどちらかを指定するスイッチである. $\neg A$ という名前のスイッチはスイッチ A と連動して, A がオンの時に $\neg A$ はオフに, 又 A がオフの時 $\neg A$ がオンになるスイッチである, とする. 今電器回路の並列を \vee で, 直列を \wedge で表わすことにより, 回路全体の電流の状態が論理式で表現できる.



は, $(B \wedge A) \vee (\neg A \wedge C)$ で表わせる. 今, 電器回路の観点から見ると A, B, C のスイッチ状態に対する回路全体に電流が流れるかどうかの状態の関係が同じであれば, 回路の仕様 (Spec) が違ってても同じ役割を果たす, と考えてよい. このことは, 次のように論理的に表現できる. (命題論理の \neg, \vee, \wedge を用いた) 各論理式は電器回路の各仕様を表現し, もし論理式 A と論理式 B とが同値 ($A \equiv B$) であれば, 回路 A と回路 B とはおなじ役割を果たす.

1. まず、次の回路を論理式で表わせ.



2. 次に、この回路と同じ役割を果たす最も単純な回路を与えよ。(そして、実際に、その回路がもとのものと同値であることを論理的に証明せよ.)

練習問題 3.14 次の前提より、定理を導き出せ.

1. 今日晴れているならば、僕はテニスをする.

晴れる \rightarrow テニスをする

2. 私が勉強するならば、僕はテニスをしない.

勉強する \rightarrow \neg テニスをする

3. 私の気分がよければ、その日は必ず晴れている.

気分がよい \rightarrow 晴れる

4. 私の気分が悪ければ、僕は勉強しない.

\neg 気分がよい \rightarrow \neg 勉強する

(定理) 私は、今日勉強しない.

\neg 勉強する

練習問題 3.15 次の前提より、定理を導き出せ.

1. 神が存在し、私が神を信じるならば、私は救われる.

神 \wedge 信 \rightarrow 救

2. 神が存在しなければ、悪魔が存在する.

\neg 神 \rightarrow 悪魔

3. 私が救われるならば、神は存在する.

$$\text{救} \rightarrow \text{神}$$

4. 悪魔が存在するならば、私は神を信じる.

$$\text{悪魔} \rightarrow \text{信}$$

(定理 1) 私が救われることなく、しかも私が神を信じるならば、悪魔が存在する.

$$\neg \text{救} \wedge \text{信} \rightarrow \text{悪魔}$$

(定理 2) 神が存在するか、私が神を信じると悪魔が存在することが同値であるかである.³

$$\text{神} \vee (\text{信} \leftrightarrow \text{悪魔})^4$$

練習問題 3.16 次の前提より、定理を導き出せ.

1. 2本足であるならば、鳥であるか、人間である.

$$2 \text{本足} \rightarrow \text{鳥} \vee \text{人間}$$

2. 鳥は空を飛べる.

$$\text{鳥} \rightarrow \text{飛}$$

(定理) 2本足で空を飛ばないならば、人間である.

$$2 \text{本足} \wedge \neg \text{飛} \rightarrow \text{人間}$$

定理 3.1 (健全性 (soundness)) 証明可能な論理式はすべてトートロジーである. この性質を持つ論理体系を**健全である**という. よって命題論理の自然演繹体系は健全である.

定理 3.2 (完全性 (completeness)) トートロジーな論理式は、すべて証明可能である. この性質を持つ論理体系を**完全である**という. よって命題論理の自然演繹体系は完全である.

(参考) 自然演繹体系の基本定理：正規化定理 (Proof-Normalization)

証明の中で次のような形で現れる論理式 $A \wedge B$, $A \rightarrow B$, $\neg A$ を**極大論理式 (maximal 論理式)** と呼ぶ. 即ち極大論理式とは、(自然演繹の) 証明中に導入規則を用いて現われ、すぐその後に消去規則で消えてしまうような、いわば不用な論理式である.

$$\frac{\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge-I}{A} \wedge-E$$

$$\frac{\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge-I}{B} \wedge-E$$

$$\frac{\frac{A}{A \vee B} \vee-I \quad \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \vee-E$$

$$\frac{\frac{B}{A \vee B} \vee-I \quad \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \vee-E$$

³ (ヒント) 定理 1 を使うことができる.

⁴ $A \leftrightarrow B$ は $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ の省略である.

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \\ A \quad \frac{A \rightarrow B}{A \rightarrow B} \rightarrow-I \\ B \end{array}}{\rightarrow-E}$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ \perp \\ A \quad \frac{\perp}{\neg A} \neg-I \\ F \end{array}}{\neg-E}$$

このような不用な論理式を全く含まない証明にすべての証明が変換できる。それは、次の定理で表現される。ここで極大論理式を含まない証明を**正規形証明**と呼ぶ。

定理 3.3 (正規化定理 (Normalization Theorem)) 自然演繹体系の任意の証明は、次の β -簡約規則 (β -reduction rules) の適当な有限回の適用により正規形証明に変形できる。

Reduction rules

$$\frac{\begin{array}{c} | \quad | \\ A \quad B \\ \frac{A \wedge B}{A \wedge B} \wedge-I \\ A \end{array}}{\wedge-E} \Rightarrow \begin{array}{c} | \\ A \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c} | \quad | \\ A \quad B \\ \frac{A \wedge B}{B} \wedge-E \end{array}}{\wedge-E} \Rightarrow \begin{array}{c} | \\ B \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c} | \quad [A] \quad [B] \\ A \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{A \vee B}{A \vee B} \vee-I \quad C \quad C \\ \vdots \quad \vdots \\ C \end{array}}{\vee-E} \Rightarrow \begin{array}{c} | \\ A \\ \vdots \\ C \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c} | \quad [A] \quad [B] \\ B \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{A \vee B}{A \vee B} \vee-I \quad C \quad C \\ \vdots \quad \vdots \\ C \end{array}}{\vee-E} \Rightarrow \begin{array}{c} | \\ B \\ \vdots \\ C \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \\ A \quad \frac{A \rightarrow B}{A \rightarrow B} \rightarrow-I \\ B \end{array}}{\rightarrow-E} \Rightarrow \begin{array}{c} | \\ A \\ \vdots \\ B \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ \perp \\ A \quad \frac{\perp}{\neg A} \neg-I \\ \perp \end{array}}{\neg-E} \Rightarrow \begin{array}{c} | \\ A \\ \vdots \\ \perp \end{array}$$

証明 今、証明 P が与えられたとする。今 P が正規形でないとする。証明 P に現れる極大論理式のうち論理記号を最も多く含むもの(今、この論理記号の数を n 個とする)を枚挙する。論理記号を n 個含む論理式のことを「長さ n の論理式」と呼ぶこととする。このような長さ n の極大論理式のうちで証明 P の一番左上に現れるものから順に上の簡約規則を適用していく。(証明 P は木構造を持つので、常に「一番左の

枝の一番上に現れる、長さ n の極大論理式は一意的に規定される。) 今、各 1 回の簡約規則の適用により、証明 P に現れる長さ n の極大論理式の数 1 つ減ることに注意すると、個の操作を高々有限回行った後に、長さ n の極大論理式を 1 つも含まない証明 P_1 が得られる。よって、 P_1 に現れる極大論理式はすべて長さ n より小さいことが分かる。今 P_1 が既に正規形であれば操作は終了する。もし P_1 が正規形でないとする。 P_1 に現れる極大論理式の最大の長さを $n_1 < n$ として、 n' に対して上と同じ操作をくり返す。この手続きは有限回で終了し、正規形証明が得られる。 証明終

次のより強い形の正規化定理も成り立つ。

定理 3.4 (強正規化定理 (Strong Normalization Theorem)) 自然演繹体系の任意の証明に対して適用可能な β -簡約規則を任意に選んで変形していく操作は、 β -簡約規則の適用の順番によらず必ず有限回で停止する (特に、この停止した証明は正規形である)。

例 3.10 次に $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A$ の証明に対する β -簡約規則による正規化の例を示す。下の最初の証明は例 2.3(2) で与えた $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$ を利用して構成した証明である。ただしこの証明は極大論理式を含んでいる。 β -簡約規則を 2 回適用することによって下の最後の証明のような正規形証明が得られる。

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{[A]^1}{A \vee B} \vee\text{-I} \quad [\neg(A \vee B)]^3}{\neg A} \neg\text{-I,1} \quad \frac{\frac{\frac{[B]^2}{A \vee B} \vee\text{-I} \quad [\neg(A \vee B)]^3}{\neg B} \neg\text{-I,2}}{\neg A \wedge \neg B} \wedge\text{-I}}{\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B} \rightarrow\text{-I,3}}{\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A} \rightarrow\text{-E} \\
 \frac{[\neg(A \vee B)]^4}{\neg A \wedge \neg B} \wedge\text{-E}}{\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A} \rightarrow\text{-I,4} \\
 \\
 \Rightarrow \frac{\frac{\frac{[A]^1}{A \vee B} \vee\text{-I} \quad [\neg(A \vee B)]^3}{\neg A} \neg\text{-I,1} \quad \frac{\frac{[B]^2}{A \vee B} \vee\text{-I} \quad [\neg(A \vee B)]^3}{\neg B} \neg\text{-I,2}}{\neg A \wedge \neg B} \wedge\text{-I}}{\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A} \rightarrow\text{-I,3} \\
 \\
 \Rightarrow \frac{\frac{[A]^1}{A \vee B} \vee\text{-I} \quad [\neg(A \vee B)]^2}{\neg A} \neg\text{-I,1}}{\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A} \rightarrow\text{-I,2}
 \end{array}$$

練習問題 3.17 次の証明を正規化して、正規形証明を求めよ。

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[A]^1}{A \vee \neg A} \quad \frac{[\neg(A \vee \neg A)]^3}{\perp} \quad 1}{\neg A} \quad \frac{\frac{[\neg A]^2}{A \vee \neg A} \quad \frac{[\neg(A \vee \neg A)]^3}{\perp} \quad 2}{\neg \neg A} \quad 3}{\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A \wedge \neg \neg A} \\
 \frac{[\neg(A \vee \neg A)]^7}{\neg A} \quad \frac{[\neg(A \vee \neg A)]^7}{\neg \neg A} \quad 6}{\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A \wedge \neg \neg A} \\
 \frac{\perp}{\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \perp} \quad 7
 \end{array}$$

第4章 タイプ付ラムダ計算 (Typed λ -calculus)

計算機科学や情報科学の基本的計算モデルの重要な枠組の1つとしてラムダ計算体系と呼ばれる計算モデルの形式体系がある。特にプログラム言語等で重要な**タイプ (型とも呼ばれる)**の概念が組み込まれたラムダ計算体系は**タイプ付 (型付き) ラムダ計算体系**と呼ばれる。

本節では第2章で導入した自然演繹体系による命題論理と対応させながらタイプ付ラムダ計算体系を導入する。ラムダ計算言語における項 (これは**ラムダ項**と呼ばれる) はアルゴリズムを表現する表現力を持ち、特にタイプ付関数型プログラミング言語のプログラムの抽象的 (数学的) 表現と考えることができる。本節では、この (タイプ付) ラムダ項は命題論理の (自然演繹の) 証明構造と同一視することができ、又、タイプ (型) は命題論理の論理式と同一視することができることを明らかにする。又、ラムダ項で表されるアルゴリズム (プログラム) の計算過程 (実行過程) は、命題論理の証明論 (文章論) の節で述べた証明の正規化過程と同一視することができることも明らかにする。

4.1 単純タイプ付ラムダ計算

定義 4.1 (タイプ)

1. P, Q, P_1, P_2, \dots 等を**基底タイプ (base types)**と呼ぶ (これは第1章では原子命題と呼んだ)。基底タイプはタイプである。
2. A, B がタイプするとき、 $A \rightarrow B$ もタイプである (\rightarrow は第1章では含意と呼んだ)。

上の1, 2でタイプと分かるものだけがタイプである (前はタイプを命題と呼んだ)。

定義 4.2 (ラムダ項 (λ -terms))

1. 各タイプ A に対して、変項として x^A, y^A, x_1^A, x_2^A を用いる。
2. もし t がタイプ A のラムダ項で、 x^B がタイプ B の変項なら、 $\lambda x^B t$ はタイプ $B \rightarrow A$ のラムダ項である。このとき、 t に現われる x^B は束縛されると言われる。
3. もし t がタイプ $B \rightarrow A$ のラムダ項で s がタイプ B のラムダ項なら、 (ts) はタイプ A のラムダ項である。

このラムダ項の形成規則は次のように表現できる。今、 $t : A$ を「 t はタイプ A のラムダ項である」と読むこととする。 $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow A_{n+1}) \dots)))$ のことを $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_{n+1}$ と略記する。変項のタイプが分かっているときは、 x^A のかわりに x のように略記することとする。

先に挙げたラムダ項の構成規則 (定義) は次のように形式的に定式化できる。

$$\frac{t : A}{\lambda x^B. t : B \rightarrow A} \rightarrow -I$$

ここで、 t に自由に現れる x^B は束縛されるという。

$$\frac{t : B \rightarrow A \quad s : B}{(ts) : A} \rightarrow -E$$

任意のタイプ B と任意のラムダ項 t と s に対して、次のラムダ項の書き換え規則は β -簡約規則と呼ばれる。

$$(\lambda x^B t s) \triangleright t[x^B := s] \quad \text{ただし } s \text{ はタイプ } B \text{ とする。}$$

ここで $t : A$ とすると、 $\lambda x^B t : B \rightarrow A$ 、 $(\lambda x^B t s) : A$ かつ $t[x^B := s] : A$ となることが分かる。特に β -簡約規則の左項と右項は同じタイプ A をもつ。

今、任意のラムダ項 u に β -簡約規則の左辺の形の項 $(\lambda x^A t s)$ が現れているとする。このとき u に現れる $(\lambda x^A t s)$ の形の部分項のことを β -簡約のリデックス (redex) (又は可約部) と呼ぶ。

ラムダ項 u にリデックスが1つも含まれない時、「 u は正規形である」と言われる。又は、「 u は既約形である」と言われることもある。) u が正規形でない場合は、一般にリデックスが複数含まれている。それらのリデックスのうちの一つ、例えば u に現れる $(\lambda z^D w v)$ を選びこの部分を上の β -簡約規則により $w[z^D := v]$ に書き換えて得られたラムダ項を u' とする。このとき、この β -簡約による u から u' への書き換えを、

$$u \rightarrow u'$$

と表すこととする。ここで注意を要するのは、もしちょうど $(\lambda z^D w v)$ とまったく同じ形のリデックスが u の中に複数現れているとしても、 $u \rightarrow u'$ が意味するのはそのうちの1つのリデックスだけを β -簡約規則で書き換えて u' が得られたということである。 u の (0 回も含めた) 任意有限回の β -簡約規則の適用で u' が得られるとき、 $u \rightarrow^* u'$ と表記することとする。(特に $u \rightarrow^* u$ である。又、 $u \rightarrow u$ ならば $u \rightarrow^* u'$ でもある。) 先に述べた β -簡約によりリデックスのタイプと書き換え後のタイプが同一であるという事実から次の命題は明らかである。

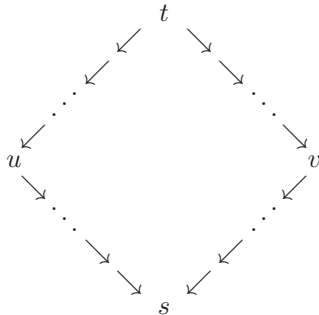
命題 4.1 任意のラムダ項 u と v に対して、 $u \rightarrow v$ で $u : A$ ならば $v : A$ である。同様に任意のラムダ項 u と v に対して、 $u \rightarrow^* v$ で $u : A$ ならば $v : A$ である。

定理 4.1 β -簡約規則に関して、停止性 (terminating property) とチャーチ・ロッサー性 (Church-Rosser property) が成立する。停止性は強正規化可能性 (strong normalizability) と、又チャーチ・ロッサー性は合流性 (confluence property) ともしばしば呼ばれる。

ここで**停止性**とは、任意のラムダ項 t に対して、 t から始まる任意の順序で β -簡約の適用を繰り返すと常に有限で止まることを意味する。又、**チャーチ・ロッサー性**とは、 t からの任意の書き換え $t \rightarrow^* u$ 及び $t \rightarrow^* v$ で得られたラムダ項 u 、 v に対してあるラムダ項 s が存在して、

$$u \rightarrow^* s \leftarrow^* v$$

が成立する。即ち、



系 4.1 任意のラムダ項 t に対して, β -簡約に対して, 一意的に t の正規形 (規約形) が決まる.

この t の一意的な正規形 s を t の値と同一視する.

定理 4.2 (カリー=Howard 同型定理 (Curry-Howard isomorphism)) タイプ A を命題論理の論理式と同一視し, $t: A$ (「ラムダ項 t がタイプ A を持つ」) を「 t が命題 A の証明構造である」と読むことにより, 命題論理とラムダ計算との同一視をすることができる. 特に次のような同一視ができる.

$$\begin{aligned} \text{タイプ } A &= \text{論理式 } A \\ \text{ラムダ項 } t &= \text{証明構造 } t \\ \text{ラムダ項の正規化過程} &= \text{証明構造の正規化過程} \end{aligned}$$

練習問題 4.1 上の事実を確かめよ.

4.2 積タイプを持つタイプ付ラムダ計算

タイプの定義を次のように拡張する。

定義 2.20' (タイプ)

- 1 及び 2 は前の通り。
3. A, B がタイプするとき, $A \times B$ もタイプである。

ここで $A \times B$ は積タイプと呼ばれる. 積タイプ $A \times B$ は命題論理における $A \wedge B$ に対応している.

次にラムダ項の定義を拡張する。

定義 2.21' (ラムダ項)

- 1,2,3 は前の通り。
4. もし t がタイプ A のラムダ項で s がタイプ B のラムダ項なら, $\langle t, s \rangle$ はタイプ $A \times B$ のラムダ項である。
5. もし t がタイプ $A \times B$ のラムダ項ならば, $\pi^1(t)$ はタイプ A のラムダ項であり, 又 $\pi^2(t)$ はタイプ B のラムダ項である。

ここで $\langle t, s \rangle$ は t と s との対を意味する. 即ち, 積タイプは対のタイプを表している.

ラムダ項の形成規則は次のように拡張できる。

$$\frac{t: A \quad s: B}{\langle t, s \rangle: A \times B} \times - I$$

$$\frac{t: A \times B}{\pi^1(t): A} \times - E \text{ 左}$$

$$\frac{t: A \times B}{\pi^2(t): B} \times - E \text{ 右}$$

ラムダ項の書き換え規則 (β -簡約規則) を次のように拡張する。

1. これまでの β -簡約規則
2. $\pi^1 \langle t, s \rangle \triangleright t$
 $\pi^2 \langle t, s \rangle \triangleright s$

この積タイプ (\times) により拡張されたラムダ項に対しても上の定理 2.24 は成立する。

定理 2.24 (カーリー=ハワード同型定理 (Curry-Howard-Lambek isomorphism)) タイプ A を命題論理と同一視し、 $t: A$ (「ラムダ項 t がタイプ A を持つ」) を「 t が命題 A の証明構造である」と読むことにより、命題論理とラムダ計算との同一視をすることができる。特に次のような同一視ができる。

$$\begin{aligned} \text{タイプ } A &= \text{論理式 } A \\ \text{ラムダ項 } t &= \text{証明構造 } t \\ \text{ラムダ項の正規化過程} &= \text{証明構造の正規化過程} \end{aligned}$$

例 4.1 自然演繹体系における \wedge と \rightarrow のみの証明図を Curry-Howard isomorphism を用いて λ 計算に書き直せ。

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ のタイプを持つラムダ項の例

$$\frac{\frac{x: A}{\lambda y^B x: B \rightarrow A}}{\lambda x^A \lambda y^B x: A \rightarrow (B \rightarrow A)}$$

(2) $(A \wedge B) \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C)$ のタイプを持つラムダ項の例

$$\frac{\frac{\frac{x: (A \times B) \times C}{\frac{\pi^1 x: A \times B}{\pi^1(\pi^1 x): A}} \quad \frac{\frac{x: (A \times B) \times C}{\frac{\pi^2(\pi^1 x): B}{\langle \pi^2(\pi^1 x), \pi^2 x \rangle: B \times C}} \quad \frac{x: (A \times B) \times C}{\pi^2 x: C}}{\langle \pi^1(\pi^1 x), \pi^2(\pi^1 x), \pi^2 x \rangle: A \times (B \times C)}}}{\lambda x^{(A \times B) \times C} \langle \pi^1(\pi^1 x), \pi^2(\pi^1 x), \pi^2 x \rangle: (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)}}$$

(3) $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ のタイプを持つラムダ項の例

$$\frac{\frac{\frac{x: A \quad y: B}{\langle x, y \rangle: A \times B} \quad z: A \times B \rightarrow C}{z \langle x, y \rangle: C}}{\frac{\lambda y^B z \langle x, y \rangle: B \rightarrow C}{\lambda x^A \lambda y^B z \langle x, y \rangle: A \rightarrow (B \rightarrow C)}}}{\lambda z^{(A \times B) \times C} \lambda x^A \lambda y^B z \langle x, y \rangle: (A \times B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))}$$

(4) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$ のタイプを持つラムダ項の例

$$\frac{\frac{\frac{x: A \times B}{\frac{x: A \times B}{\pi^2 x: B} \quad \frac{\pi^1 x: A \quad y: A \rightarrow (B \rightarrow C)}{y \pi^1 x: B \rightarrow C}}{(y \pi^1 x) \pi^2 x: C}}{\lambda x^{A \times B} (y \pi^1 x) \pi^2 x: A \wedge B \rightarrow C}}{\lambda y^{A \rightarrow (B \rightarrow C)} \lambda x^{A \times B} (y \pi^1 x) \pi^2 x: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)}$$

4.3 ラムダ項を用いたデータ型の定義の例 (Nat タイプ)

自然数を表わすデータ型 (タイプ) Nat を次のように定義する。

$$Nat \equiv (P \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow P)$$

データ型 (タイプ) Nat を持つ対象を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
0 &::= \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P x \\
1 &::= \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (fx) \\
2 &::= \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (f(fx)) \\
&\vdots \\
n &::= \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P \underbrace{(f(\cdots (fx)\cdots))}_{n \text{ 個}}
\end{aligned}$$

0 に対するタイプチェックの例 (0 が *Nat* の証明になっていることのチェック).

$$\frac{\frac{[P]^x}{P \rightarrow P} \rightarrow -I_x}{\text{Nat}(\equiv (P \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow P))} \rightarrow -I_f$$

2 に対するタイプチェックの例 (2 が *Nat* の証明になっていることのチェック).

$$\frac{\frac{\frac{[P \rightarrow P]^f}{P} \rightarrow -E}{\frac{[P \rightarrow P]^f}{P} \rightarrow -E} \rightarrow -I_x}{\text{Nat}(\equiv (P \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow P))} \rightarrow -I_f$$

次にタイプ *Nat* に関する簡単なプログラムを書いてみることにする。まず、自然数 n を入力して $n+1$ (n の次の数) を出力する *Suc* という関数のプログラム (アルゴリズム) をラムダ項で与える。

定義 4.3 (*Suc*)

$$\text{Suc} := \lambda n^{\text{Nat}} \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (f((nf)x))$$

計算の例: たとえば *Suc* に 3 を入力した場合の β -簡約による計算の過程は次のようになる。

$$\begin{aligned}
(\text{Suc } 3) &\equiv (\lambda n^{\text{Nat}} \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (f((nf)x)) \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (f(f(fx)))) \\
&\triangleright \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (f((\lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (f(f(fx))))f)x) \\
&\triangleright \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (f(\lambda x^P (f(f(fx))))x) \\
&\triangleright \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (f(f(f(fx)))) \\
&\equiv 4
\end{aligned}$$

練習問題 4.2 (*Suc* 4) を計算せよ。

Suc に対する自然演繹証明

$$\frac{\frac{\frac{[P \rightarrow P]^f}{P} \rightarrow -E}{\frac{[Nat(\equiv ((P \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow P)))^n}{P \rightarrow P} [P \rightarrow P]^f \rightarrow -E} \rightarrow -E} \rightarrow -E} \rightarrow -E} \rightarrow -I_x}{\frac{\frac{[P \rightarrow P]^f}{P} \rightarrow -E}{\text{Nat}(\equiv (P \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow P))} \rightarrow -I_f} \rightarrow -I_n} \rightarrow -I_n} \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$$

次に自然数2つを引数とする加法のプログラムを与える.

定義 4.4 (+)

$$+ := \lambda m^{Nat} \lambda n^{Nat} \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P ((mf)((nf)x))$$

計算の例:

$$\begin{aligned} 3 + 2 &\equiv ((+3)2) \\ &\triangleright \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P ((3f)((2f)x)) \\ &\equiv \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (\lambda x^P (f(f(fx)))(f(fx))) \\ &\triangleright \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (f(f(f(f(fx)))))) \\ &\equiv 5 \end{aligned}$$

練習問題 4.3 対応する証明を作り, $3 + 2$ のタイプが Nat となっていることを確かめよ.

乗法演算子 (かけ算) はこの言語で次のようにプログラムできる.

$$Times := \lambda m^{Nat} \lambda n^{Nat} \lambda f^{P \rightarrow P} (m(nf))$$

このプログラム ($Times$) のタイプが確かに $Nat \rightarrow (Nat \rightarrow Nat)$ となっていることを対応する (自然演繹の) 証明を与えて確かめよ.

かけ算のプログラム $Times$ に 3 と 2 をインプットとして与えてプログラムを走らせた例

$$\begin{aligned} 3 \text{ Times } 2 &\triangleright \triangleright \lambda f^{P \rightarrow P} (3(2f)) \\ &\triangleright \triangleright \lambda f^{P \rightarrow P} (3\lambda x^P (f(fx))) \\ &\equiv \lambda f^{P \rightarrow P} (\lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (f(f(fx))) \underbrace{\lambda x^P (f(fx))}_{\equiv F}) \\ &\triangleright \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (F(F(Fx))) \\ &\triangleright \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (F(F(f(fx)))) \\ &\triangleright \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (F(f(f(f(fx))))) \\ &\triangleright \lambda f^{P \rightarrow P} \lambda x^P (f(f(f(f(f(fx)))))) \\ &\equiv 6 \end{aligned}$$

練習問題 4.4 次の計算過程を示せ.

1. $(3 + 4) + 2$
2. $(2 \times 3) + 2$

定義 4.5

$$\begin{aligned} Bool &\stackrel{def}{\equiv} Nat \rightarrow (Nat \rightarrow Nat) \\ T &\stackrel{def}{\equiv} \lambda a^{Nat} \lambda b^{Nat} a \\ F &\stackrel{def}{\equiv} \lambda a^{Nat} \lambda b^{Nat} b \end{aligned}$$

定義 4.6 (タイプ A のプログラム x と y に対する if-then-else)

$$if\text{-then-else} := \lambda p^{Bool} \lambda x^{Nat} \lambda y^{Nat} ((px)y)$$

即ち, $\text{if } p \text{ then } x:\text{Nat} \text{ else } y:\text{Nat}$ を $((px^{\text{Nat}})y^{\text{Nat}})$ と定義していることとなる.
計算の例:

$$\begin{aligned} & \lambda p^{\text{Bool}} \lambda x^{\text{Nat}} \lambda y^{\text{Nat}} ((px)y) T s t \\ \triangleright \triangleright & \text{if } T \text{ then } s \text{ else } t \\ \equiv & (((\lambda a^{\text{Nat}} \lambda b^{\text{Nat}} a)s)t) \\ \triangleright & ((\lambda b^{\text{Nat}} s)t) \\ \triangleright & s \end{aligned}$$

(なぜなら, 変項が新たに束縛されることはないから.)

練習問題 4.5 $s : \text{Nat}$ 及び $t : \text{Nat}$ として $\text{if-then-else } F s t$ が t となることを計算せよ.

定義 4.7 (*AND, OR*)

$$\begin{aligned} \text{AND} & \stackrel{\text{def}}{\equiv} \lambda a^{\text{Bool}} \lambda b^{\text{Bool}} \lambda m^{\text{Nat}} \lambda n^{\text{Nat}} ((a((bm)n))((bn)n)) \\ \text{OR} & \stackrel{\text{def}}{\equiv} \lambda a^{\text{Bool}} \lambda b^{\text{Bool}} \lambda m^{\text{Nat}} \lambda n^{\text{Nat}} ((a((bm)m))((bm)n)) \end{aligned}$$

(e.g.)

$$\begin{aligned} T \text{ OR } F & \triangleright \triangleright \lambda m^{\text{Nat}} \lambda n^{\text{Nat}} ((T((Fm)m))((Fm)n)) \\ & \equiv \lambda m^{\text{Nat}} \lambda n^{\text{Nat}} (((\lambda c^{\text{Nat}} \lambda d^{\text{Nat}} c)((Fm)m))((Fm)n)) \\ & \triangleright \lambda m^{\text{Nat}} \lambda n^{\text{Nat}} ((\lambda d^{\text{Nat}} ((Fm)m))((Fm)n)) \\ & \triangleright \lambda m^{\text{Nat}} \lambda n^{\text{Nat}} ((Fm)m) \\ & \equiv \lambda m^{\text{Nat}} \lambda n^{\text{Nat}} (((\lambda c^{\text{Nat}} d^{\text{Nat}} d)m)n) \\ & \triangleright \triangleright \lambda m^{\text{Nat}} \lambda n^{\text{Nat}} m \\ & \equiv T \\ \\ F \text{ OR } F & \triangleright \triangleright ((\lambda m^{\text{Nat}} \lambda n^{\text{Nat}} ((F((Fm)m))((Fm)n))) \\ & \triangleright \triangleright \lambda m^{\text{Nat}} \lambda n^{\text{Nat}} ((Fm)n) \\ & \triangleright \triangleright \lambda m^{\text{Nat}} \lambda n^{\text{Nat}} n \\ & \equiv F \end{aligned}$$

練習問題 4.6

$T \text{ AND } T$ が T

$T \text{ AND } F$ が F

$F \text{ AND } T$ が F

$F \text{ AND } F$ が F

$T \text{ OR } T$ が T

$F \text{ OR } F$ が F

となることを計算して確かめよ.

第5章 述語論理

述語論理の言語

本節においては、前章の命題論理の言語を拡張して、一階述語論理 (first order predicate logic) を展開する。命題論理では、命題を基本単位として取り扱ったが、述語論理では、命題を個体名とそれに関係する述語に分解し、それらの関係について探求するものである。この考え方は、古代ギリシアの哲学者アリストテレスの言語観とも一致しているものである。

命題論理との相違を明確にするために、次の命題を考えてみる。

「亜紀は美しい」

命題論理では、この命題を一つの命題定項、例えば P 等で表した。しかし述語論理では、この命題を主語「亜紀」と述語「*は美しい」に分解する。そして、主語を個体記号「亜紀」に、述語を述語記号“美しい(*)”にそれぞれ記号化し、命題全体を

美しい(亜紀)

と記号化する。ここで、個体記号は対象を表し、述語記号はその対象が持つ性質を表す。

この個体記号と述語記号との関係は、主語と述語との関係に相当するものであるが、我々が今導入しようとしているものは人工言語であるゆえ、日本語など特定の言語における主語述語の関係とは必ずしも一致しない。実際、上のように個体記号を1つだけとる述語記号だけでなく、以下においては述語の概念を一般化して n 個の個体間の関係を表す場合も含めて述語記号を考えることとする。

さて、命題を個体記号と述語記号とによって記号化することによって、命題論理では扱えなかった領域をも扱えるようになる。その1つは、対象とその対象が持つ性質との関係である。例えば、“美しい(亜紀)” “美しい(今日子)” “美しい(美奈子)”... 等である。これらの命題は、命題論理においては、すべて異なる命題記号で表されてきた。しかし、述語論理においては、それぞれが、共通の述語記号“美しい(*)”を持つ命題で表される。即ち、「亜紀さん」と「美しい」との関係、「今日子さん」と「美しい」との関係、「美奈子さん」と「美しい」との関係を分析することができるのである。

さらに、複数の個体間の関係をも取り扱うことも可能になる。例えば、

「花子は、ミツが好きです」

は個体「花子」「ミツ」と述語「*は*が好きです」に分解される。ここで、「 x は y が好きです」を $L(x, y)$ と記号化すれば、この命題は

$L(\text{花子}, \text{ミツ})$

と記号化できる。これは、紛れもなく花子とミツのある関係を表している。

以上の点に加えて、述語論理の最大の特徴は、「すべての...は...である。」 「ある...は...である。」 という命題を取り扱えるようになるということである。例えば、「すべての人はミツが好き」や「ある人はミツが好き」などである。これらは、「花子は、ミツが好きです」の「花子」を「すべての人」や「ある人」に置き変えたものである。そこで、これらの命題を記号化する場合には、 $L(\text{花子}, \text{ミツ})$ の“花子”を x で

置き換え, 「すべての人はミツが好き」を“すべての x について $L(x, \text{ミツ})$ ”と, 「ある人はミツが好き」を“ある x について $L(x, \text{ミツ})$ ”と記号化する. ここで, “すべての x について”を“ $\forall x$ ”で, “ある x について”を“ $\exists x$ ”で記号化すると, 上の命題はそれぞれ次のように記号化される.

$$\forall x L(x, \text{ミツ})$$

$$\exists x L(x, \text{ミツ})$$

この記号化によって, 「すべて」と「ある」ということがどのような特徴を持つかを記号論理学上で分析できるようになる. これは, 命題論理では取り扱われ得なかった点である.

まず, 言語を導入する. 一階述語論理の言語は, 命題論理に以下の記号を付け加えたものである.

定義 5.1 (一階述語論理の言語) \neg

個体変項: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$

個体定項: $c_1, c_2, c_3, \dots, \text{花子}, \text{ミツ}, \text{ポチ}, \dots$ ¹

述語 (関係) 記号: $P(*), Q(*, *), R(*, *, *), \dots$ 人間 $(*)$, \dots , 愛 $(*, *)$, \dots ² ここで $S(\underbrace{*, \dots, *}_{n \text{ 個}})$ の形の述語

記号は n -項述語記号と呼ばれる.

論理記号: \forall (全称量化記号 (universal quantifier) と呼ばれる), \exists (存在量化記号 (existential quantifier) と呼ばれる)³

個体変項及び個体定項は項と呼ばれる. 又, 項を表すのに $s, t, t_0, t_1, t_2, \dots$ 等のメタ表現を用いることとする.

次に一階論理式を定義する.

定義 5.2 (一階論理式の定義 (文法)) \neg

1. $S(*, \dots, *)$ が n -項述語記号で t_1, \dots, t_n が項ならば, $S(t_1, \dots, t_n)$ は原子論理式 (atomic formula) (又はアトムとも呼ばれる) である. 原子論理式は論理式である.
2. もし A, B が論理式であるならば, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ も論理式である.
3. もし A が論理式であるならば, $(\neg A)$ も論理式である.
4. もし A が論理式であるならば, 任意の個体変項 x に対して $(\forall x A)$, $(\exists x A)$ も論理式である.⁴

ここでカッコの省略法については命題論理の論理式のカッコの省略法に従うものとする. 但し, 論理記号の結びつきの強さの順序は量化記号 \forall, \exists が \neg と同じ強さ (即ち, 最も強いもの) とする.

カッコの省略規則 (述語論理)

$$\begin{array}{ccccccc} & \rightarrow & & \wedge & & \neg & \\ & & < & & < & \vee & \\ \leftrightarrow & & & \vee & & & \exists & \end{array}$$

¹ 個体定項は, 個体が持っている名前, すなわち固有名辞である.

² $P(x)$ は「 x は性質 P をもつ」, $Q(x, y)$ は「 x と y は Q の関係にある」, 人間 (x) は「 x は人間である」愛 (x, y) は「 x は y を愛している」...と読む.

³ “ $\forall x$ ” は「すべての x 」 「for all x 」と, “ $\exists x$ ” は「ある x 」 「for some x 」と読む.

⁴ 例えば, A を論理式 $P(\text{花子}) \wedge Q(x, y)$ とすると, $A(x)$ によって, 論理式 A に自由変項 x が現われていることを示す. ここで, A 中のすべての自由変項が “ $A(x)$ ” の形で表わされる必要はない.

ある論理式 A の構成において現れる $(\forall xB)$ 又は $(\exists xB)$ の形の論理式に対して、 B はこの $\forall x$ の (又は、この $\exists x$ の) **スコープ** と呼ばれる。この時 B に現れる記号は $\forall x$ のスコープに現れていると言われる。ある論理式 A に現れているある個体変項 x に対して、この現れが**自由**に現れていると呼ばれるのは、この x がどんな $\forall x$ 又は $\exists x$ のスコープにも現れていない時である。特に、上の A における x の現れが $\forall x$ (又は $\exists x$) のスコープ B に現れてはいるが、 B に現れるどんな $\forall x$ 及び $\exists x$ のスコープにも現れていない時、この x の現れはこの $\forall x$ (又は $\exists x$) によって**束縛されている**と言われる。又、この時、この $\forall x$ (又は $\exists x$) の現れはこの x の現れを**束縛する**と言われる。ある量化記号 (\forall 又は \exists) により束縛されている個体変項は**束縛変項** (bound variable) と呼ばれる。又、どんな量化記号によっても束縛されていない個体変項は**自由変項** (free variable) と呼ばれる。

例えば、 $P(\text{花子}, x, y)$ を原子論理式とすると、 $\forall xP(\text{花子}, x, y)$ において、 x は束縛変項であり、 y は自由変項である。また、花子は個体定項である。なお、 $\forall xP(\text{花子}, x, y)$ と $\forall zP(\text{花子}, z, y)$ とは区別しない。というのは、ここで、束縛変項 x, z は、命題中の場所を表わすのに使われ、 x も z も同じ場所を束縛しているからである。

より一般的に、束縛変項の変換規則は次のように一般化して与えられる。

与えられた論理式 A に対して、すべての束縛関係を変えることなく束縛変項記号を置き換えることにより得られる論理式 B は、もとの論理式 A と同一視される。

ここで**束縛関係**とは量化記号の現れがある個体変項の現れを束縛する関係のことを意味する。

以下、 $\exists y$ 好き (ミツ, y)、 $\forall x\exists y$ 好き (x, y)¹、 $\forall y(\neg Q(c_1, y) \wedge \exists xP(x, y))$ が論理式であることを示す。

1 より 好き (ミツ, y) は論理式

4 より $\exists y$ 好き (ミツ, y) は論理式

1 より 好き (x, y) は論理式

4 より $\exists y$ 好き (x, y) は論理式

4 より $\forall x\exists y$ 好き (x, y) は論理式

1 より $Q(c_1, y), P(x, y)$ は論理式

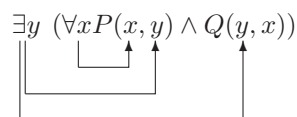
3 より $\neg Q(c_1, y)$ は論理式

4 より $\exists xP(x, y)$ は論理式

2 より $\neg Q(c_1, y) \wedge \exists xP(x, y)$ は論理式

4 より $\forall y(\neg Q(c_1, y) \wedge \exists xP(x, y))$ は論理式

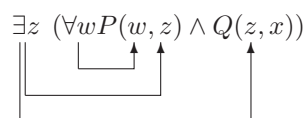
論理式 $\exists y(\forall xP(x, y) \wedge Q(y, x))$ におけるすべての束縛関係は下の矢印で示される3つである。



¹ ここで、 $\exists y$ 好き (ミツ, y) を「ミツが好きになる人が存在する」、 $\forall y$ 好き (ミツ, y) を「すべての人がミツが好きだ」、 $\exists x$ 好き (x , ミツ) は「ミツを好きな人が存在する」と読む。そして、 $\forall x\exists y$ 好き (x, y) は「すべての人は誰かを好きだ」と読み、 $\exists y\forall x$ 好き (x, y) と区別する。後者は「すべての人が好きな人が存在する」と読み、ある人が少なくともひとり存在し、その人はすべての人に好かれていることを意味する。一方、前者は誰でも人には、それぞれ好きな人が少なくともひとりいることを意味する。

ここで $\exists y$ のスコープは $\forall x P(x, y) \wedge Q(y, x)$ であり, $\forall x$ のスコープは $P(x, y)$ である. このことから, $P(x, y)$ の y と $Q(y, x)$ の y はどちらも $\exists y$ によって束縛され, $P(x, y)$ の x は $\forall x$ に束縛されるのに対し, $Q(y, x)$ の x は「自由に」現れていることが分かる.

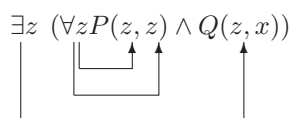
今, 例えば束縛変項 y, x を z, w で置き換えて得られる $\exists z(\forall w P(w, z) \wedge Q(z, x))$ は下の矢印で示される通り, 上の3つの束縛関係すべてを保つので, $\exists y(\forall x P(x, y) \wedge Q(y, x))$ と同一視される.



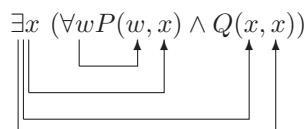
ところで, 上の自由に現れている x を他の変項記号, 例えば w で置き換えて, $\exists z(\forall w P(w, z) \wedge Q(z, w))$ とすると, もはやこの論理式はもとの論理式と同一視できなくなることに注意しておく. これはもとの論理式で現れていた自由変項の記号が変わったからである. 自由変項の置き換えがあると, たとえ束縛変項と量化記号の束縛関係がすべて保たれていても, 論理式として同一視することはできない.

一方, もとの論理式の束縛変項を次のように置き換えた場合は, 図示されている通り束縛関係が変化するので, もと論理式と同一視することはできない.

1. 束縛変項 y, x を共に z で置き換えたとき;



2. 束縛変項 x を w で置き換え, y を x で置き換えたとき;



5.1 述語論理の構文論

命題論理のすべての推論規則に、次の量化記号に対する推論規則を加えたものが述語論理の推論規則である。

∀-I

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A(x) \end{array}}{\forall x A(x)}$$

(条件)²

ここで x が、 $A(x)$ に至る証明図 $\Pi(x)$ の開かれた前提 (open assumption) において、自由変項として現われていない。

説明のため、具体的な例をあげてみる。

$$\frac{\frac{\frac{[B(x)]_1}{\vdots} C(x)}{B(x) \rightarrow C(x)} (\rightarrow -I_1)}{\forall x (B(x) \rightarrow C(x))} (\forall -I)}{\quad} \quad (5.1)$$

下から二段目の論理式 $B(x) \rightarrow C(x)$ は、これから量化記号 \forall が付け加えられる論理式であり、上の推論規則の “ $A(x)$ ” にあたる。そして、条件のいう “ x ” とは、 $B(x) \rightarrow C(x)$ に現れている自由変項 x であり、この規則の適用によって、“ $\forall x$ ” で縛られることになる。さらに、「 Πx の前提」とは、 $B(x) \rightarrow C(x)$ を導くために用いられた前提であり、証明図の一番上に現われている $B(x)$ である。この例では、規則 $\rightarrow -I$ によって、その前提が既に「閉じている」、即ち $[B(x)]_1$ となっている。ゆえに、自由変項 x がその前提に現れていない。よって、 $\forall -I$ の条件は満たされており、 $\forall x (B(x) \rightarrow C(x))$ と結論できる。

より明確にするため、誤った推論を取り上げよう。

$$\frac{\frac{\frac{[B(x)]_1}{\vdots} C(x)}{\forall x C(x)} (\forall -I)}{B(x) \rightarrow \forall x C(x)} (\rightarrow -I_1)}{\quad} \quad (5.2)$$

この推論は、 $\forall -I$ の条件を満たしていない。この証明における誤りは、次の段階にある。

$$\frac{\frac{B(x)}{\vdots} C(x)}{\forall x C(x)} (\forall -I)$$

ここで、推論規則の “ $A(x)$ ” に当たるものは $C(x)$ である。そして、“ x ” とは、 $C(x)$ の自由変項 x である。そして、 $C(x)$ に至る証明図の「 Πx の開かれた前提」とは、 $B(x)$ である。例 1 とは異なり、この段階ではまだ $B(x)$ は「開いている」。そして、 x が $B(x)$ において自由に現われている。よって、 $\forall -I$ の条件

² この規則は、「ある t が A である」ことから「すべての y が A である」ことを推論する規則である。しかし、この規則が無条件に用いられることは危険である。というのは、たったある 1 つの事実からすべてについての法則が導き出されることになりかねないからである。例えば、 $\forall -I$ を無条件に用いれば、「 x はミツが好きです」という仮定から「すべての人はミツが好きです」が推論でき、これに $\rightarrow -I$ を用いると「 x がミツを好きならば、すべての人がミツを好きです」と結論付けられる。これは、誤りである。このことを防ぐため、ある条件が必要となる。

を満たさず、 $C(x)$ から $\forall yC(y)$ への推論は成り立たない。ここで、(5.2) が誤った推論であることを、それぞれに日常的な推論にあてはめて見ることによって考えてみる。 $B(x)$ を「 x はまじめに授業に出席している」とし、 $C(x)$ を「 x は、その授業の先生から成績 A をもらう」とする。この時、(5.1) の推論によって得られる結論 $\forall x(B(x) \rightarrow C(x))$ は「まじめに授業に出席している人は、すべて、その授業の先生から成績 A をもらう」ということになる。これは正しい。一方、(5.2) で得られる $B(x) \rightarrow \forall xC(x)$ は、「 x がまじめに授業に出席しているならば、その授業を登録している全員が、先生から成績 A をもらう」ということになる。

この誤まりは $A(x)$ から $\forall xC(x)$ への推論が、 \forall -I の条件を満たしていなかったことによるのであるが、日常的な推論にあてはめることによって、この条件の意味が多少とも明らかになろう。例 2 における $B(x)$ から $\forall xC(x)$ への推論は、「ある特定の x がまじめに授業に出席している」ことから「全員が、その授業の先生から成績 A をもらう」という推論である。この推論のおかしなところは、ある特定の x についての事実から、全員についての事実が推論されていることにある。これは、何か 1 つのものが白いという事実から、すべてのものが白いということ推論することに等しい。 \forall -I の条件は、まさにこのような推論を禁止しているのである。これに対して、(5.1) では、「 x がまじめに授業に出席しているならば、その x が、その授業の先生から成績 A をもらう」という推論が、すべての x についていえることを示しているのである。この推論においては、何等特定の x についての言及を含んでいない。即ち、条件は、 $C(x)$ が何か特定の x についての結論でなければ、つまり、一般的な不特定者についての結論であるならば、それから $\forall xC(x)$ を推論できることを示しているのである。

ここで、 \forall -I の条件をいまいし形式的に説明する。 \forall -I は、 \wedge -I の一般化である。というのは、先に上げた \forall -I の推論規則は、次のようなものと考えられるからである。

$$\frac{\begin{array}{cccc} D & D & D & D \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F(c_1) & F(c_2) & F(c_3) & \cdots F(c_i) \cdots \end{array}}{F(c_1) \wedge F(c_2) \wedge F(c_3) \wedge \cdots \wedge F(c_i) \wedge \cdots} (\wedge\text{-I})$$

ここで、 $D \cdots F(c_i)$ という論証がすべて同じ形であるならば、つまり特定の定項 c_i についてのものではなく、任意のものについての推論であれば、 $D \cdots F(c_1), D \cdots F(c_2), \dots$ の各論証を、一般化して変項 x に対する $D \cdots F(x)$ の論証と書き換え可能となる。そして、 $F(c_1) \wedge F(c_2) \wedge F(c_3) \wedge \cdots$ を $\forall xF(x)$ とみなすと、規則 \forall -I は、不特定な個体 x について F であるという推論から、 $\forall xF(x)$ を推論するものであると言える。

\forall -E

$$\frac{\forall xA(x)}{A(t)}$$

ここで、 t は、任意の一階の項 (first order term)、即ち任意の変項または定項。

例を上げる。 x, y は、自然数を値とする変項とする。

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \forall x \exists y (y > x) \end{array}}{\exists y (y > x)} (\forall\text{-E}) \quad (5.3)$$

ただし、次のような推論は不可能である。

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \forall x \exists y (y > x) \end{array}}{\exists x (x > x)} (\forall\text{-E}) \quad (5.4)$$

推論 (5.3) は、「すべての自然数には、その数より大きい数が存在する」ことから、任意の数 x より大きい数 y が存在する」ことを証明している³。一方、(5.4) は、同じ前提から「自分自身が自分自身より大きくなるような数が存在する」ことを証明している。推論 (5.4) の誤りは、規則 \forall -I において導入された t が $A(t)$ において自由に現れなければならないことに反していることにある。

\exists -I

$$\frac{A(t)}{\exists x A(x)}$$

ここで、 t は、任意の一階の項 (first order term)、即ち任意の変項または定項。

\exists -E

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \exists x A(x) \end{array} \quad \begin{array}{c} A(x) \\ \vdots \\ D \end{array}}{D}$$

(条件)

- (i) D には、 x は自由変項として現れない。
- (ii) $A(x)$ の自由変項に対しては \forall -I の (条件) が成立する⁴。

この推論は、「 A であるものが少なくとも 1 つ存在する」ことから「ある x が A である」を推論する規則である。ただ、その様な直接的な形式ではない。一方で「 A であるものが少なくとも 1 つ存在する」ことが証明され、他方で「ある x が A である」ことから “ D ” が任意な x について証明された時、「 x が A である」という前提なしに、「 A であるものが少なくとも 1 つ存在する」ことから “ C ” が証明できるという形式になっている。ここで “ x が A である” という前提が消えるということで、「 A であるものが少なくとも 1 つ存在する」から、「 x が A である」を介して、 C への推論が成される。

この推論をいまいし形式的に説明してみると、 \exists -E は \forall -E の一般化であるということになる。というのは、推論規則 \exists -E は、次のようなものと考えられるからである。

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ F(c_1) \vee F(c_2) \vee \cdots \vee F(c_i) \vee \cdots \end{array} \quad \begin{array}{c} F(c_1) \\ \vdots \\ D \end{array} \quad \begin{array}{c} F(c_2) \\ \vdots \\ D \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c} F(c_i) \\ \vdots \\ D \end{array} \quad \cdots}{D}$$

ここで、 $F(c_1) \cdots D, \dots, F(c_i) \cdots D, \dots$ というそれぞれの推論がすべて同じ形であるならば、つまり特定の定項についてのものだけでなく、それぞれの推論を任意の変項 x に対する推論 $F(x) \cdots D$ とみなすことができる。そして、 $F(c_1) \vee F(c_2) \vee \cdots \vee F(c_i) \vee \cdots$ を $\exists x F(x)$ とみなすと、規則 \exists -E は \forall -E の一般化とみなすことができる。

規則 \exists -E を例を上げて説明する。

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x F(x, b)]^1}{F(a, b)} (\forall-E)}{\exists y \forall x F(x, y)} (\exists-I)}{\exists y F(a, y)} (\exists-E_1)$$

この推論において、規則内の “ $\exists x A(x)$ ” にあたるものは $\exists y \forall x F(x, y)$ ，“ $A(x)$ ” にあたるものは $\forall x F(x, b)$ ，“ D ” にあたるものは $\exists y F(a, y)$ である。そして、“自由変項 x ” は、 $\forall x F(x, b)$ に現れる自由変項 b である。

³ ここで x を “2” と考えてみると、この推論の意味がより明らかになろう。

⁴ $A(x)$ の自由変項 x が、 D を導くために用いられた $A(x)$ 以外の「開いた前提」に自由に現れない。

上の推論では、自由変項 b が $\exists yF(a, y)$ に自由に現れていない。よって、条件 (i) を満たしている。また、 $\exists yF(a, y)$ の「開いた前提」は $\exists yF(a, y)$ 以外に存在しないので、 b が自由に現れようがない。よって、条件 (ii) を満たしている。

次に誤った推論をあげる。

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{[L(x, \text{花子})]^1}{\exists xL(x, \text{花子})} \quad (\exists\text{-I}) \end{array}}{H(x)} \quad \frac{\frac{\forall x(\exists yL(x, y) \rightarrow H(x))}{\exists yL(x, y) \rightarrow H(x)} \quad (\forall\text{-I})}{H(x)} \quad (\rightarrow\text{-E}) \quad (\exists\text{-E}_1)$$

上で $L(x, y)$ を「 x が y を愛している」、 $H(x)$ を「 x は幸せである」とする。そして、 $\forall y(\exists xL(y, x) \rightarrow H(y))$ を、「誰かを愛している人は、みな幸せである」とする。この推論は、 $\exists xL(x, \text{花子})$ (花子を愛している人が少なくとも1人存在する)⁵ から、まったく突然に x という人に対して $H(x)$ (x は幸せである)⁶ と推論している。

この推論の誤りは、条件 (i) を満たしていないこと、即ち、“ D ” にあたる $H(x)$ に、自由変項 “ x ” にあたる x が自由に現れている点である。これによって、「花子を愛している人が、この世界に少なくとも1人いる」という事実だけから、その人が x という人である、と結論付けされる。もし、世界に x しか存在しないのであれば、これも言えよう。しかし、それはあり得ない。条件の (i) 前半は、これを禁止するためのものである。

次に、条件 (ii) が満たされていない場合。

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{[L(x, \text{花子})]^1}{\exists xL(x, \text{花子})} \quad (\exists\text{-I}) \end{array}}{\exists zP(z)} \quad \frac{\frac{\exists yL(x, y) \rightarrow P(x)}{P(x)} \quad (\rightarrow\text{-E})}{\exists zP(z)} \quad (\exists\text{-I}) \quad (\exists\text{-E}_1)$$

ここで、 $P(x)$ を「 x は禿になる」とする。そして、 $\exists yL(x, y) \rightarrow P(x)$ を、「 x は誰かを愛すると禿になる」という x の非常に独特な性質を表わしているとする。

この推論の誤りは、条件 (ii) を満たしていない点である。それによって、 $\exists xL(x)$ (花子を愛している人が少なくとも1人いる) から、 $P(x)$ (どこかの誰かの x が禿になる) と結論されることになる。この推論の誤りは、「花子を愛している誰か」が禿となった x とは限らないにも関わらず、その「誰か」を x とみなした点にある。その結果、 x 固有の性質「誰かを愛すると禿になる」が適用され、「 x が禿た」と結論付けているのである。条件 (ii) は、このような事態を避けるためのものである。

ここで、いくつかの例を挙げる。

例 5.1 (述語論理の証明)

1. $\neg\forall xA(x) \rightarrow \exists x\neg A(x)$

⁵ この論理式の x は、 $\exists x$ によって縛られているから、何か特定の人を指すわけではないことに注意して欲しい。

⁶ ここでの x は、ある人の名前である。従って、 $\exists xL(x, \text{花子})$ の x とは、異なることに注意!

$$\begin{array}{c}
\frac{[\neg A(x)]^1}{\exists x \neg A(x)} \exists-I \quad \frac{[\neg \exists x \neg A(x)]^2}{\neg \neg E} \\
\frac{\perp}{\neg \neg A(x)} \neg-I,1 \quad \frac{A(x)}{\neg \neg E} \\
\frac{\forall x A(x)}{\forall-I} \quad \frac{[\neg \forall x A(x)]^3}{\neg \neg E} \\
\frac{\perp}{\neg \neg \exists x \neg A(x)} \neg-I,2 \quad \frac{\exists x \neg A(x)}{\neg \neg E} \\
\frac{\neg \forall x A(x) \rightarrow \exists x \neg A(x)}{\rightarrow-I,3}
\end{array}$$

2. $\neg \forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists x \forall y \neg A(x, y)$

$$\begin{array}{c}
\frac{[\neg \exists y A(x, y)]^1}{\exists x \neg \exists y A(x, y)} \exists-I \quad \frac{[\neg \exists x \neg \exists y A(x, y)]^2}{\neg \neg E} \\
\frac{\perp}{\neg \neg \exists y A(x, y)} \neg-I,1 \quad \frac{\exists y A(x, y)}{\neg \neg E} \\
\frac{\forall x \exists y A(x, y)}{\forall-I} \quad \frac{[\neg \forall x \exists y A(x, y)]^5}{\neg \neg E} \\
\frac{\perp}{\neg \neg \exists x \neg \exists y A(x, y)} \neg-I,2 \quad \frac{\exists x \neg \exists y A(x, y)}{\neg \neg E} \\
\frac{\exists x \forall y \neg A(x, y)}{\exists-I} \quad \frac{[\neg \exists y A(x, y)]^4}{\neg \neg E} \\
\frac{\exists x \forall y \neg A(x, y)}{\exists-E,4} \\
\frac{\neg \forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists x \forall y \neg A(x, y)}{\rightarrow-I,5}
\end{array}$$

練習問題 5.1 次の命題が証明可能であることを示せ。

1. $\exists x \neg A(x) \rightarrow \neg \forall x A(x)$
2. $\exists x \forall y \neg A(x, y) \rightarrow \neg \forall x \exists y A(x, y)$
3. $\neg \forall x \neg A(x) \leftrightarrow \exists x A(x)$
4. $\forall x \exists y A(x, y) \leftrightarrow \neg \exists x \forall y \neg A(x, y)$
5. $\forall x A(x) \wedge \neg \exists y B(x) \leftrightarrow \forall z (A(z) \wedge \neg B(z))$
6. $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
7. $\exists x (A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
8. $\forall x \forall y (A(x) \rightarrow B(y)) \leftrightarrow (\exists x A(x) \rightarrow \forall y B(y))$
9. $\exists x \exists y (A(x) \rightarrow B(y)) \leftrightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \exists y B(y))$

5.2 述語論理の意味論

ここでは、一階述語論理の論理の意味論を展開する。この論理の意味論の基本的な考え方は、ある言語に属する表現の意味(解釈)をその表現によって指示される対象と同一視することに存する。そこで、この意味論は、しばしば表示の意味論(Denotational semantics)と呼ばれる。前述の命題論理の意味論では、意味対象として、命題論理における論理式の真理値、即ち、 t および f だけを考えた。つまり、論理式の値としての t 、 f だけが、意味論の対象であり、任意の論理式は t 又は f を指示すると考えられた。一階述語論理では、これまでのような論理式の値としての t 、 f という対象領域のほかに、一階の項(個体変項と個体定項)の指示対象領域、即ち、個体の値の領域(これを以下では集合 D で表す)をも考えることとなる。

まず、意味領域(値域)から定義する。論理式の値域として $\{t, f\}$ 、(一階述語論理の)項の値域(これを個体領域と呼ぶ)としてある集合 D を与える。与えられた個体領域 D に対して、述語論理言語表現の意味(解釈)は次のように与えられると考える。

1. 各個体定項の意味解釈は、領域 D 内のそれが指示するある対象のこととする。
2. 各個体変項に対して領域 D 上の対象を割り当て、これをその個体変項に対する付値と呼ぶ。ある付値が与えられたとき、個体変項の意味解釈は、その付値によって割り当てられた D 上の対象のこととする。
3. 各1座述語記号 $P(*)$ の意味解釈は、領域 D 内のある部分集合のこととする。即ち、 $P(*)$ の表示の意味は、 D のある部分集合として指定される。述語記号が1座述語記号ではなく、2座以上である場合、例えば、 $P(*, *, *)$ のように3座述語記号(three place predicate symbol)である場合は、 $P(*, *, *)$ の意味解釈は、 $D \times D \times D$ の部分集合のこととする。

以下において、論理式の意味、即ち真偽値を定義する。

4. 閉原子論理式⁷ $P(c)$ の意味解釈を次のように考える。個体定項 c (固有名 c) の意味解釈 (D 内の指示対象)が、 P の解釈 (D の部分集合)の要素である時、 $P(c)$ は真と解釈され、そうでない場合 $P(c)$ は偽と解釈される。

多座述語からなる閉原子論理式 $P(c_1, c_2, c_3)$ 等についても同様に定義される。

5. $P(x)$ の形の開論理式(ここで x は自由変項)と与えられた x の付値 a (ここで a は D の要素)にと対して、 $P(x)$ の意味解釈 ($P(x)[a]$ と表わす)とは次のように与えられる。

$P(x)[a]$ は付値 a が P の外延の意味 (D のある部分集合)の要素のとき、真と解釈され、そうでないとき偽と解釈される。

$P(x_1, c_1, x_2)$ 等のような多座の場合も $P(x_1, c_1, x_2)[a, b]$ の真偽値は、上の自然な拡張として与えられる。

6. $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$, $A \rightarrow B$ の意味解釈(真偽値)は、命題論理の意味論で与えた通りに与えられる。ただし、これらに自由個体変項 x_1, \dots, x_n が現れている場合には、与えられた付値 $a_1, \dots, a_n (\in D)$ に対して真偽値を考える。
7. $\forall x A(y_1, \dots, y_n, x)[a_1, \dots, a_n]$ (ここで y_1, \dots, y_n, x は A に現れるすべての自由変項の枚挙であり、 a_1, \dots, a_n は、 y_1, \dots, y_n への付値である)は次のように与えられる。
 $\forall x A(y_1, \dots, y_n)[a_1, \dots, a_n]$ が真であるのは、すべての D の要素 b に対して、 $A(y_1, \dots, y_n, x)[a_1, \dots, a_n, b]$ が真である時かつその時に限る。

⁷ 閉原子論理式とは、論理記号も自由変項も含まない論理式のことである。

8. 上と同様な表記法のもとで, $\exists x A(y_1, \dots, y_n)[a_1, \dots, a_n]$ が真であるのは, ある D の要素 b に対して, $A(y_1, \dots, y_n, x)[a_1, \dots, a_n, b]$ が真である時かつその時に限る.

以上の意味論を, **モデル (model)** の概念を用いて, 次のようにより形式的に定義することができる.

定義 5.3 (意味写像) 一階述語論理の言語に対するモデル $\langle D, \phi \rangle$ とは, 次のようにして与えられる構造のことである. ここで, D は任意の空でない集合であり, **個体領域**と呼ばれる. ϕ は**意味写像**と呼ばれる次のような写像である.

1. 各個体定項 c に対して $\phi(c) \in D$, つまり $\phi(c)$ は c という名が指示する D の対象, 即ち c の解釈である. 以下, $\phi(c)$ を \bar{c} と表わすことにする.
2. 各 n 座述語記号 $P(\underbrace{*, *, \dots, *}_n)$ に対して,

$$\phi(P) \subseteq \underbrace{D \times D \times \dots \times D}_n$$

これを述語 P の解釈と考える. (P の解釈とは, 内容的には, P が真となるような領域上の外延である.)

今, $\langle D, \phi \rangle$ が与えられた時, 任意の論理式 $A(x_1, \dots, x_n)$ (ここで x_1, \dots, x_n は A に現れる自由変項の枚挙である) と自由変項の枚挙 x_1, \dots, x_n に対する付値 $a_1, \dots, a_n (\in D)$ について, $A(x_1, \dots, x_n)$ の付値 a_1, \dots, a_n に対する解釈 (真偽値) を $\phi(A(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n])$ と表し次のように定義する. ここで, $\phi(A(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n]) = t$, 即ち $A(x_1, \dots, x_n)$ が $\langle D, \phi \rangle$ の上で付値 a_1, \dots, a_n のもとで真であるということを $\langle D, \phi \rangle \models A(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n]$ と表わす. 特に, A が閉論理式である時は, これを $\langle D, \phi \rangle \models A$ と表す.

定義 5.4 ($A(x_1, \dots, x_n)$ の付値 a_1, \dots, a_n に対する解釈 (真偽値))

1. $A(x_1, \dots, x_n)$ が原子論理式である時, 即ちある n -項述語記号 P に対して, $A(x_1, \dots, x_n)$ が $P(x_1, \dots, x_n)$ の形の時, $\langle D, \phi \rangle \models P(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n]$ であるのは, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \phi(P)$ の時かつその時に限る.
2. $A(x_1, \dots, x_n)$ が $B(x_1, \dots, x_n) \wedge C(x_1, \dots, x_n)$ の形である時, $\langle D, \phi \rangle \models (B(x_1, \dots, x_n) \wedge C(x_1, \dots, x_n))[a_1, \dots, a_n]$ であるのは, $\langle D, \phi \rangle \models B(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n]$ かつ $\langle D, \phi \rangle \models C(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n]$ である時かつその時に限る.
3. $A(x_1, \dots, x_n)$ が $B(x_1, \dots, x_n) \vee C(x_1, \dots, x_n)$ の形である時, $\langle D, \phi \rangle \models (B(x_1, \dots, x_n) \vee C(x_1, \dots, x_n))[a_1, \dots, a_n]$ であるのは, $\langle D, \phi \rangle \models B(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n]$ 又は $\langle D, \phi \rangle \models C(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n]$ である時かつその時に限る.
4. $A(x_1, \dots, x_n)$ が $\neg B(x_1, \dots, x_n)$ の形である時, $\langle D, \phi \rangle \models \neg B(x_1, \dots, x_n)$ であるのは, $\langle D, \phi \rangle \not\models B(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n]$ の時 (即ち, $\langle D, \phi \rangle \models B(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n]$ でない時) かつその時に限る⁸.
5. $A(x_1, \dots, x_n)$ が $\forall y B(x_1, \dots, x_n, y)$ の形である時, $\langle D, \phi \rangle \models \forall y B(x_1, \dots, x_n, y)$ であるのは, D のすべての要素 b (即ち, すべての $b \in D$) に対して $\langle D, \phi \rangle \models B(x_1, \dots, x_n, y)[a_1, \dots, a_n, b]$ である時かつその時に限る.

⁸ $A \rightarrow B$ の意味は, $\neg A \vee B$ として与えられるものとする.

6. $A(x_1, \dots, x_n)$ が $\exists y B(x_1, \dots, x_n, y)$ の形である時, $\langle D, \phi \rangle \models \exists y B(x_1, \dots, x_n, y)$ であるのは, D のある要素 b (即ち, ある $b \in D$) に対して $\langle D, \phi \rangle \models B(x_1, \dots, x_n, y)[a_1, \dots, a_n, b]$ である時かつその時に限る.

次に例を示し以上のことを説明する.

例 5.2 D として { 花子さん, 聖子さん, 今日子さん, 美奈子さん, 亜紀さん } という人間の集合を考える. つまり, 今, 5人だけの世界を考える.

今, 我々の言語には, 個体定項として (つまり, 固有名として)

則子, 「今日子」, 「美奈子」, 「亜紀

だけが含まれ, また, 述語記号として

美しい (x) (x は美しい)

だけが含まれているとする. 先に挙げた意味写像 ϕ としていろいろな可能性が考えられるが, 次のように指定する.

ϕ (則子) = 聖子さん
 ϕ (今日子) = 今日子さん
 ϕ (美奈子) = 美奈子さん
 ϕ (亜紀) = 亜紀さん

この指定が, 意味写像 ϕ の条件を満たしていることは明らかである.

上に挙げたものの内に ϕ (花子) = ... が存在しないのは, 我々の人工言語には 4つ固有名しかなく, 我々が考えている世界 D に存在する (どこかの) 花子さんを示す名前は, 残念ながら存在しないことを示す. また, ϕ (則子) = 聖子さんは, 「則子」という名前が, 我々の世界 D の中にいる聖子さんという人間を指示していることを示している.

今, ϕ (美しい) を指定することによって我々の人工言語の「美しい」という言葉の意味を与えることができるわけである.

例えば, 次のように指定したとする.

ϕ (美しい) = { 花子さん, 亜紀さん }

この集合は, D の部分集合であるから意味写像の条件を満たしている.

今, 前述した論理式の真偽値の定義に従えば, 次のことが言える.

$\langle D, \phi \rangle \models$ 美しい (亜紀)

(つまり, 「亜紀は美しい」という我々の人工言語の文は世界 $\langle D, \phi \rangle$ で真である.)

$\langle D, \phi \rangle \not\models$ 美しい (今日子)

(つまり, 「今日子は美しい」は世界 $\langle D, \phi \rangle$ で偽である.)

$\langle D, \phi \rangle \not\models$ 美しい (則子)

(つまり, 「則子は美しい」は世界 $\langle D, \phi \rangle$ で偽である.)

では, 次の文についてはどうであろうか.

美しい (花子)

これは、真でも偽でもない。そもそも、“美しい(花子)”という文は我々の言語に存在しない、なぜなら、我々の言語には、“花子”という名詞が存在しないので、“美しい(花子)”は論理式ではない(即ち、我々の人工言語の文ではない)からである。

一方、個体定項の代わりに個体変項を用いて作られる“美しい(x)”は論理式の定義に適合するから、我々の言語では完全な文である。

ただし、このような自由変項を含む論理式の真偽には、前に示したように、変項についての D の要素の付値が必要となる。定義 5.4 に従えば、次のことが言える。

$$\langle D, \phi \rangle \models \text{美しい}(x)[\text{亜紀さん}]$$

(つまり、“亜紀さんは美しい”という内容は真である。)

同様に、次のことも言える。

$$\langle D, \phi \rangle \not\models \text{美しい}(x)[\text{今日子さん}]$$

(つまり、“今日さんは美しい”という内容は真である。)

$$\langle D, \phi \rangle \models \text{美しい}(x)[\text{花子さん}]$$

(つまり、“花子さんは美しい”という内容は真である。)

さて今までは、ある $\langle D, \phi \rangle$ の下での論理式の真偽値について述べてきた。ここで、ある閉論理式 A に対して、もし任意の D と ϕ について $\langle D, \phi \rangle \models A$ が言える場合、 A は妥当 (valid) であるという。閉論理式 A に対して、 A が妥当であることを $\models A$ と表す。

多ソート述語論理言語

述語論理言語においては、量化論理記号 \forall, \exists の解釈は与えられた領域 D 全体に関して定義された。例えば、閉論理式 $\forall x A(x)$ に対して $\langle D, \phi \rangle \models \forall x A(x)$ は領域 D 上のすべての a に対して $\langle D, \phi \rangle \models A(x)[a]$ と解釈され、又閉論理式 $\exists x A(x)$ に対して $\langle D, \phi \rangle \models \exists x A(x)$ は領域 D 上のある a に対して $\langle D, \phi \rangle \models A(x)[a]$ と解釈された。よって特に D の中のある部分領域上における量化の解釈を与えるには、その部分領域を意味解釈として持つような一項述語記号を導入して、この一項述語記号を援用することにより、そのような量化の解釈がなされる。例えば、「 D 上のすべての人間 x に対して $A(x)$ 」及び「 D 上のある人間 x に対して $A(x)$ 」は、 D の部分領域である人間の集合を解釈として持つような一項述語記号、例えば $Man(*)$ を導入して、 $\forall x (Man(x) \rightarrow A(x))$ 及び $\exists x (Man(x) \wedge A(x))$ と表現された。一方これに対して、項がどのような種類の領域(これをソートと呼ぶ)を表しているかを言語のレベルで指示しておくことがしばしば有用である。例えば、今 x, y を人間のソートを表す変項と指定しておくことにより、先の $\forall x (Man(x) \rightarrow A(x))$ 及び $\exists x (Man(x) \wedge A(x))$ は単に $\forall x A(x)$ 及び $\exists x A(x)$ と書けることとなる。以下で、これまでの述語論理言語を多ソート述語論理言語に拡張しておく。

定義 5.5 (多ソート述語言語)

ソート記号： $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ が与えられる。

個体変項： 各ソート α に対して、ソート α の変項 $x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha, x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots$ が与えられる。

個体定項： 各ソート α に対して、個体定項 $c_1^\alpha, c_2^\alpha, \dots$ が与えられる。

個体変項と個体定項は項と呼ばれる。

n -項述語記号： ソート $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ に対して n -項述語記号 $P^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\underbrace{*, \dots, *}_{n \text{ 個}})$ が与えられる。

論理式の定義は、次の点を除けばこれまでの述語論理言語の論理式の定義と同様である。

もし $P^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(*, \dots, *)$ が n -項述語記号で、 t_1, \dots, t_n が各々ソート $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の項であるとき、 $P^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(t_1, \dots, t_n)$ は (原子) 論理式である。

n 個のソート $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を許す (多ソート) 述語論理言語の意味論においては、モデル $\langle D, \phi \rangle$ の概念は、モデル $\langle D_{\alpha_1}, \dots, D_{\alpha_n}, \phi \rangle$ の概念に自然に拡張される。ここで D_{α_i} はソート α_i の意味領域 (ソート α_i の対象の集合) とする。ソート α_i の個体定項 c^{α_i} に対して $\phi(c^{\alpha_i}) \in D_{\alpha_i}$ とする。ソート α_i の個体定項 x^{α_i} の付値 a は条件 $a \in D_{\alpha_i}$ を満たすものとする。ソート $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ に対する n -項述語記号 $P^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\underbrace{*, \dots, *}_{n \text{ 個}})$ に対して、 $\phi(P^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\underbrace{*, \dots, *}_{n \text{ 個}})) \subseteq D_{\alpha_1} \times \dots \times D_{\alpha_n}$ とする。他はこれまでの述語論理の意味論における意味解釈の定義と変わらないものとする。

定理 5.1 (完全性定理 (Completeness theorem)) $\models A$ (即ち、 A が妥当であること) は $\vdash A$ (即ち、 A が証明可能であること) と同値である。

練習問題 5.2 先の例で、次を確かめよ。

$$\begin{aligned} \langle D, \phi \rangle &\models \text{美しい(今日子)} \vee \text{美しい(亜紀)} \\ \langle D, \phi \rangle &\not\models \text{美しい(今日子)} \wedge \text{美しい(亜紀)} \\ \langle D, \phi \rangle &\models \neg(\text{美しい(今日子)} \wedge \text{美しい(亜紀)}) \\ \langle D, \phi \rangle &\models \exists x(\text{美しい}(x)) \\ \langle D, \phi \rangle &\not\models \forall x(\text{美しい}(x)) \end{aligned}$$

練習問題 5.3 次の前提より、定理を導き出せ。

1. 今日晴れているならば、僕はテニスをする。

$$\text{晴れる} \rightarrow \text{テニスをする}$$

2. 僕が勉強するならば、僕はテニスをしない。

$$\text{勉強する} \rightarrow \neg \text{テニスをする}$$

3. 僕の気分がよければ、その日は必ず晴れている。

$$\text{気分がよい} \rightarrow \text{晴れる}$$

4. 僕の気分が悪ければ、僕は勉強しない。

$$\neg \text{気分がよい} \rightarrow \neg \text{勉強する}$$

(定理) 僕は、今日勉強しない。

$$\neg \text{勉強する}$$

練習問題 5.4 次の前提より定理を導き出せ。

1. 今日晴れているならば、すべての人はテニスをする。

$$\text{晴れている} \rightarrow \forall x \text{ テニス}(x)$$

2. どんな人でも、勉強するならばテニスをしなない.

$$\forall x(\text{勉強}(x) \rightarrow \neg \text{テニス}(x))$$

3. 気分がよい人がいるならば、その日は必ず晴れている.

$$\exists x \text{気分}(x) \rightarrow \text{晴れている}$$

4. 気分が悪ければ、勉強しない人がいる.

$$\exists x(\neg \text{気分}(x) \rightarrow \neg \text{勉強}(x))$$

(定理) 勉強しない人がいる.

$$\exists x \neg \text{勉強}(x)$$

練習問題 5.5 次の前提より、定理を導き出せ.

1. 神が存在し、私が神を信じるならば、私は救われる.

$$\text{神} \wedge \text{信} \rightarrow \text{救}$$

2. 神が存在しなければ、悪魔が存在する.

$$\neg \text{神} \rightarrow \text{悪魔}$$

3. 私が救われるならば、神は存在する.

$$\text{救} \rightarrow \text{神}$$

4. 悪魔が存在するならば、私は神を信じる.

$$\text{悪魔} \rightarrow \text{信}$$

(定理 1) 私が救われることなく、しかも私が神を信じるならば、悪魔が存在する.

$$\neg \text{救} \wedge \text{信} \rightarrow \text{悪魔}$$

(定理 2) 神が存在するか、私が神を信じると悪魔が存在することが同値であるかである.

$$\text{神} \vee (\text{信} \leftrightarrow \text{悪魔})$$

練習問題 5.6 次の前提より、定理を導き出せ.

1. 誰かを愛する人は、みな、幸せである.

$$\forall x(\exists y L(x, y) \rightarrow H(x))$$

2. 愛される人は美しい.

$$\forall y(\exists x L(x, y) \rightarrow B(y))$$

3. 美しい人なら誰でも、愛する人がいる.

$$\forall y(B(y) \rightarrow \exists x L(x, y))$$

4. すべての人が美しいならば、不幸を感じる人がいる.

$$\forall x B(x) \rightarrow \exists y \neg H(y)$$

(定理 1) 愛されかつ愛さない人が、いないならば、美しい人は幸せである.

$$\neg \exists x (\exists y L(y, x) \wedge \neg \exists y L(x, y)) \rightarrow \forall y (B(y) \rightarrow H(y))$$

(定理 2) みんなが美しいならば、愛され愛さない人がいる.

$$\forall x Bx \rightarrow \exists x (\exists y L(y, x) \wedge \forall y \neg L(x, y))$$

練習問題 5.7 次の前提より、定理を導き出せ.

1. 2本足であるならば、鳥であるか、人間である.

$$2 \text{ 本足} \rightarrow \text{鳥} \vee \text{人間}$$

2. 鳥は空を飛べる.

$$\text{鳥} \rightarrow \text{飛}$$

(定理) 2本足で空を飛べないならば、人間である.

$$2 \text{ 本足} \wedge \neg \text{飛} \rightarrow \text{人間}$$

練習問題 5.8 次の前提より、定理を導き出せ.

1. どんな人も、勉強すれば成績が良い.

$$\forall x (\text{勉強}(x) \rightarrow \text{成績}(x))$$

2. どんな人も、成績が良ければ幸せである.

$$\forall x (\text{成績}(x) \rightarrow \text{幸}(x))$$

3. どんな人も、勉強しなければ幸せである.

$$\forall x (\neg \text{勉強}(x) \rightarrow \text{幸}(x))$$

(定理) すべての人は、幸せである.

$$\forall x \text{ 幸}(x)$$

練習問題 5.9 次の前提より、定理を導き出せ.

1. どんな人も、成績が良ければ楽しい.

$$\forall x (\text{成績}(x) \rightarrow \text{楽}(x))$$

2. どんな人も、勉強しなければ楽しい.

$$\forall x (\neg \text{勉強}(x) \rightarrow \text{楽}(x))$$

3. 楽しくない人がいる.

$$\exists x \neg \text{楽}(x)$$

(定理) 勉強したのに成績が良くない人がいる.

$$\exists x (\text{勉強}(x) \wedge \neg \text{成績}(x))$$