1 意味論と証明論

論理学の主要な目的の1つは推論の分析。

- どのような推論が正しくて、どのような推論が正しくないか、その**基準を設定する**。
- また、推論が与えられたときに、それが**どれほど複雑であろうとも**、正しい推論か否かを**機械的に判定する**ための方法論の確立。

1.1 推論とは

推論とは？例えば以下のようなもの。
サザエさんの家のナミヘイさんが、鉢植えが壊れているのを見つけ、同時にサザエさんとカツオくんの足跡を見つけて以下のように考えた。

前提1	サザエかカツオが犯人だ。
前提2	サザエが犯人なら、カツオも犯人だ。
結論	故にカツオは犯人だ。

推論とは、**いくつかの（複数の）前提**と、**1つの結論**から成る文の集まり。

このような推論が**正しい、妥当**、と言われるときの推論の持つ性質とは何だろうか？どのような推論が正しい、妥当と言われるのだろうか？

1.2 「正しい推論」の基準：意味論の観点から

前提と結論の間の**真偽関係**によって、正しい・妥当な推論を捉える観点が**意味論の観点**。

観点2 ：意味論（セマンティクス）の観点

> **前提が真であるような状況を考えると、そのような状況下では必ず結論が真であるときに、その推論は正しい・妥当な推論である、と言われる。また逆に、前提が真であるのに、結論が偽であるような状況があるときに、その推論は間違った・非妥当な推論である、と言われる。**

意味論の観点に照らしてナミヘイさんの推論について考えてみると、以下のような手続きによってその妥当性を判定することができる。

1. サザエさんとカツオくんについてあり得る状況（それぞれについて犯人である場合と犯人でない場合の組合せ）をすべて列挙する。
2. 真理表を用いて真理値分析を行い、前提がすべて真である状況（真理表の列）で、結論がどのような真理値をとるかを調べる。

「サザエが犯人である」を S、「カツオが犯人である」を K とする。

	結論	前提 1	前提 2
S	K	$S \vee K$	$S \to K$
T	$\boxed{\text{T}}$	$\boxed{\text{T}}$	$\boxed{\text{T}}$
T	F	T	F
F	$\boxed{\text{T}}$	$\boxed{\text{T}}$	$\boxed{\text{T}}$
F	F	F	T

上の真理表より、前提 1 及び前提 2 が真であるようなどのような状況下でも、必ずカツオが犯人という結論が成り立っている。このために、上の推論は妥当な推論であり、カツオはナミヘイに怒られる。

1.3 「正しい推論」の基準：証明論の観点から

前提と結論の間の式変形（推論規則よる）に基づく導出関係によって、推論の妥当性を規定する観点が**証明論の観点**。

観点 1 ：証明論（シンタクス）の観点

> **前提から結論へ至る証明図（推論規則の連鎖による式変形）が存在するときに、その推論は正しい・妥当な推論であると言われる。**

$$\begin{array}{c}\text{前提 前提} \cdots \text{前提} \\ \ddots \vdots \,\cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \text{結論}\end{array}$$

このような証明論の観点に基づくと、ナミヘイの推論が正しいことは、以下のような証明図を構成することにより示される。

$$\dfrac{\text{サザエ} \vee \text{カツオ} \qquad \dfrac{\text{サザエ} \to \text{カツオ} \quad [\text{サザエ}]^1}{\text{カツオ}} \to E \qquad [\text{カツオ}]^1}{\text{カツオ}} \vee E, 1$$

1. 前提 1 で、サザエかカツオのどちらかが犯人であることが分かっているので、例えば、カツオが犯人であるとしてみれば、これはそのまま結論である。

2. では、サザエが犯人であるとしてみる。すると、前提 2 から、サザエが犯人ならカツオも犯人である、ことが分かっているので、→ 除去規則を用いて、カツオも犯人であることが分かる。

3. 従って、サザエが犯人であるとしても、カツオが犯人であるとしてもどちらにしても、カツオが犯人であることが結論される。

1.4　意味論と証明論の比較

　意味論の観点に基づく推論分析法と、証明論の観点に基づく推論分析法は、どのような関係にあるのだろうか？

意味論（セマンティクス）	証明論（シンタクス）
正しい推論の意味論的基準 前提がすべて真のときに結論も真	正しい推論の証明論的基準 前提から結論に至る証明・論証が存在する
真理値分析 文の意味内容、真偽（真理値）の考察	推論規則に基づく証明図の構成 推論規則に基づく、文の変形

　妥当な推論についての、意味論的基準と証明論的基準は、どのような関係にあるのだろうか？

　両者が一致するということが、**健全性定理**と**完全性定理**によって示される。この二つの定理は併せて単に「完全性定理」と呼ばれることも多い。

- 前提 $A_1, \ldots, A_n$ から結論 B が**意味論的に帰結する**、すなわち「前提 $A_1, \ldots, A_n$ が真であるときには、必ず結論 B も真である」ことを $A_1, \ldots, A_n \models B$ と表す。

  とくに B が恒真式（トートロジー）であることを $\models B$ と表す。

- また、前提 $A_1, \ldots, A_n$ から結論 B が**証明論的に帰結する**、すなわち「前提 $A_1, \ldots, A_n$ から結論 B への証明図が存在する」ことを $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ と表す。

  とくに B がなんの前提もなしに（開いた前提なしに）証明可能であることを $\vdash B$ と表す。

定理 1 (健全性定理（Soundness theorem）) $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ が成り立つならば、$A_1, \ldots, A_n \models B$ が成り立つ。
とくに B が（開いた）前提なしに証明可能（$\vdash B$）であるならば、B は恒真式（$\models B$）である。

定理 2 (完全性定理（Completeness theorem）) $A_1, \ldots, A_n \models B$ が成り立つならば、$A_1, \ldots, A_n \vdash B$ が成り立つ。
とくに B が恒真式（$\models B$）であるならば、B は（開いた）前提なしに証明可能（$\vdash B$）である。

上の二つの定理をまとめると以下のようになる。
前提 $A_1, \ldots, A_n$ から結論 B が、意味論的に帰結する（$A_1, \ldots, A_n \models B$）ことと、証明論的に帰結すること（$A_1, \ldots, A_n \vdash B$）こととは、同値である。

完全性定理によって、意味論と証明論、両者の妥当な推論の基準が一致するということが分かるのだが、それなら何故**異なる二つの観点が存在する**のだろうか？どちらか一つの観点のみで充分なのではないだろうか？

この理由について考えるために、意味論の方法論と証明論の方法論の、それぞれの利点と難点を考えてみる。

- 与えられた推論が**妥当であることを示す場合**：
  - 意味論の観点からは、**すべての状況（原子論理式の真理値の組合せ）を考慮しなければならない**ため、原子論理式の数が増える程、考えなければならない状況が増え、真理表が大きくなり書くのが大変になる。

    例えば、$P \to Q, Q \to R, R \to S, S \to T$ という前提と $P \to T$ という結論の関係を考えるようなときには、いちいち真理表を作成するのは効率が悪い。
  - それに対して、証明図を構成するのは、すべての場合を考慮するような必要はなく、**証明図を一つだけ構成すればよい**ために、真理表を構成するのに比べて効率がよい。
- 与えられた推論が**妥当でないことを示す場合**：
  - 真理表を構成することにより、推論が妥当でないことを機械的に示すことができる。とくに、すべての状況をチェックしなくても、**前提が真で結論が偽となる状況（反例と呼ぶ）を一つだけ見つければよい**。
  - それに対して、**証明が存在しないことを示すのは一般に困難**である。無数にあり得る証明図について、その一つ一つについて与えられた推論の証明図になっていないことをチェックしなければならない。

意味論（セマンティクス）	**証明論（シンタクス）**
正しい推論の意味論的基準 前提がすべて真のときに結論も真	正しい推論の証明論的基準 前提から結論に至る証明・論証が存在する
真理値分析 文の意味内容、真偽（真理値）の考察	推論規則に基づく証明図の構成 推論規則に基づく、文の変形
推論が「妥当である」ことを示すために すべての状況を列挙しなければならない 非効率的	推論が「妥当である」ことを示すために 証明図を一つだけ見つければよい 効率的
推論が「妥当でない」ことを示すために 反例を一つだけみつければよい 機械的	推論が「妥当でない」ことを示すために すべての証明をチェックしなければならない 一般に困難

Remark 1 上の比較を見ると、証明論の方法論については、推論が妥当でないことを示す機械的な方法が明示されていないために、証明論的方法論よりも、（いくらメンドウでも）意味論の方法論の方が好ましいように見える。しかしながら、これは命題論理での比較に限った話であって、後期にやる述語論理に関しては、推論が妥当であることを意味論的に示すのは、一般に非常に困難となる。（単にメンドウというわけではなく。）つまり、上記の意味論と証明論のそれぞれの利点・難点は、述語論理でより明確なものとなる。

意味論と証明論の以上のような利点と難点を踏まえると、与えられた推論が妥当であるかどうかを判定するためには、両者の方法論を場合によって使い分けることが賢いやり方であるように思える。

実際、日常における推論や数学における推論においても、なんらかの主張や命題が正しいかどうかを判断する際に、

- それが正しそうに思えれば、論証や証明をもってその推論の妥当性を正当化しようと試み、
- 逆に正しくなさそうに思えれば、反例を探す努力をする、

ということを自然に行っている場合が多い。

このような場合に応じた使い分け戦略が正しいやり方であることを保証してくれるのが、「完全性定理」なのである。完全性定理はしばしば、

「どんな論理式も、その論理式が偽となる状況が存在する（恒真でない）かまたは、（前提なしに）証明可能である」

と言い換えられる。

論理式を偽とする状況（原子論理式の真理値の組合せ）をその論理式の「反例」と呼ぶことにすると、上のことは、

「どんな論理式にも、反例かまたは、証明が存在する」

とまとめることができる。すなわち、完全性定理によって、反例（意味論的概念）か証明（証明論的概念）の存在が保証されるのである。