論理学入門

金曜（4）15：00–（5）16：45–；21A 教室

1　真理値分析

1.1　要素文の真理値

（意味論的な）正しい推論の基準は、**前提である文（論理式）がすべて真であるときには、結論となる文（論理式）も必ず真であること**だった。

それでは文が真であるとか偽であるとは、厳密にはどのようなことだろうか？

これまで見てきたように、文には接続詞をまったく含まない**要素文**と、接続詞を含む**複合文**の区別があった。

まずはもっとも基本的な文である要素文が真であるとか偽であるとはどのようなことかについて考えてみる。例えば「太郎は人間である」という要素文については、以下のように真か偽かが定まると考えられる。

- 「太郎は人間である」という文が真であるのは、太郎という名前の個体が実際に人間であるときである。
- また、逆に「太郎は人間である」という文が偽であるのは、太郎という個体が実際には、例えば犬の名前であって人間ではないときである。

つまり、「太郎は人間である」という文は、何らかの事態を指し示していて（もしくは表現していて）、そのような事態が実際に成り立っているときには、「太郎は人間である」という文は真であり、そのような事態が実際に成り立っていないときには、「太郎は人間である」という文は偽となるのである。

それでは次に、接続詞および否定詞を使って構成される複合文の真偽について考えてみる。

以下では、文の真偽のことを文の**真理値**と呼び、真を T（Truth）で、偽を F（Falsity）で表すことにする。

1.2　連言：並列的接続詞

まずは、並列的接続詞**連言**を含む複合文について見ていく。

- 太郎は英語も話せ、**かつ**ドイツ語も読める。
- 太郎は家にい**て**、花子は出かけている。
- 太郎は留守であ**り、しかも**花子も留守だ。
- 太郎も家にいる**し**、花子も家にいる。
- 太郎**と**花子が家にいる。
- 太郎**も**花子**も**家にいる。
- 太郎はよく働いた、**そして**よく眠った。
- 太郎は家にいる**が**、花子は留守だ。
- 太郎は家にいる**けれども**、花子は家にいない。
- 太郎が家にいる**にも関わらず**、花子は家にいない。

ここでは、以下の文について検討する。

太郎は英語も読め、かつドイツ語も読める。

この文は次の二つの要素文からなる複合文である。

- 太郎は英語が読める。
- 太郎はドイツ語が読める。

これら二つの要素文の真理値と、「太郎は英語も読め、かつドイツ語も読める」という複合文の真理値の関係を考察すると以下のようになると考えるのが自然である。

- 実際に太郎という人間が英語も読めて、ドイツ語も読めるときには、「太郎は英語も読め、かつドイツ語も読める」という文は真となり、
- 太郎という人間が実際には、英語を読めないか、またはドイツ語が読めないときには、「太郎は英語も読め、かつドイツ語も読める」という文は偽となる。

このような要素文と複合文の真理値の関係を表にまとめると以下のようになる。

太郎は英語が読める	太郎はドイツ語が読める	太郎は英語も読め、かつドイツ語も読める
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

このような、要素文の真理値に対して複合文のとる真理値を記述した表を**真理表（真理値表）**という。

「し」「も」「けれども」「が」等についても、同様の表となることから、**文の真理値にどのように働きかけるか**という観点からは、これらの接続詞は区別することのできない、同一の働きを持つ接続詞と考えられるのである。

上の考察を一般化すると、任意の文 A, B について、**連言 $A \wedge B$ がどのようなときに真となるか**についての**連言の真理条件**が得られる。

> **$A \wedge B$ が真であるのは、A と B の両方ともが真であるとき、であり、その他の場合（A が偽であったり、B が偽である場合）はすべて $A \wedge B$ は偽である。**

定義 1 (連言の真理条件) 任意の文 A, B について、$A \wedge B$ が真であるのは、A と B の両方ともが真であるとき、かつそのときに限る。

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

かつそのときに限る、という言い方は日常はあまり使わない論理学や数学に特有の言い回しである。これによって**「それ以外の場合は $A \wedge B$ は真でない（つまり偽である）」**ということを表している。

（もう少し詳しく言うとこのひとことによって、「A かつ B が真でない（つまり偽である）のは、A と B の両方ともが真であるということがないとき（つまり A か B のどちらかが偽であるとき）である」という文を省略しているのである。）

1.3 選言：選択的接続詞

次に選択的接続詞**選言**を含む複合文について考える。

- 太郎**か**花子が家にいる。
- 太郎が家にいる**か、あるいは**花子が家にいる。
- 彼はアメリカへ行くか、それともヨーロッパへ行くかのどちらかだ。

ここでは、以下の文について検討する。

太郎か花子が家にいる。

この文は次の二つの要素文からなる複合文である。

- 太郎は家にいる。
- 花子は家にいる。

この二つの要素文と元の複合文との真理値の関係を検討すると、「太郎か花子が家にいる」という文は、太郎も花子も 2 人とも家にいない場合を除いては真であると考えられる。従って以下のような真理表になると考えられる。

太郎は家にいる	花子は家にいる	太郎か花子が家にいる
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ここで、「太郎か花子が家にいる」という文は、太郎か花子のどちらか一方しか家にいない、ということまでは主張していないと考えられる。そのために、太郎と花子が 2 人とも家にいたとしても、この文自体が否定されるわけではなく、やはり真であると考えて良いと思われる。

上の考察を一般化して以下のような**選言の真理条件**が得られる。

定義 2 (選言の真理条件) 任意の文 A, B について、$A \vee B$ が真であるのは、A か B が真であるとき、かつそのときに限る。

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

1.4 否定：否定詞

次に、否定詞を含む複合文について考える。ここでは、以下の文について検討する。

太郎は家にいない。

この文は次の要素文からなる複合文であると考えられる。

- 太郎は家にいる。

この要素文と元の複合文との真理値の関係を検討すると、以下のように考えるのが自然である。

- 太郎が実際に家にいるときには、「太郎は家にいない」という文は偽であり、
- また、太郎が留守であるときには、「太郎は家にいない」という文は真である。

従って以下のような表になると考えられる。

太郎は家にいる	太郎は家にいない
T	F
F	T

定義 3 (否定の真理条件) 任意の文 A について、$\neg A$ が真であるのは、A が偽であるとき、かつそのときに限る。

A	$\neg A$
T	F
F	T

1.5 補足：排他的選言

選択的接続詞のうちには、「どちらか一方のみ」ということを明確にして用いたい場合もある。例えば以下の文について考えてみる。

太郎は今、ヨーロッパかアメリカにいる。

このような文については、太郎がヨーロッパとアメリカの両方にいるような場合は、偽になると考えるのが自然である。すると、先の選言の真理条件は間違っているのではないか、と思われるかもしれない。

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ここでは、上のような選言の真理条件を保持し、「太郎は今、ヨーロッパかアメリカにいる」などの文については、「どちらか一方のみである」ことを明示して以下のように表現することとする。

太郎か花子のどちらか一方のみが家にいる

このような特殊な選言は「排他的選言」と呼ばれ、記号では $P \bigtriangledown Q$ と表す。排他的選言については、以下のような表を考えることができる。

太郎は家にいる	花子は家にいる	太郎か花子のどちらか一方のみが家にいる
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

定義 4 (排他的選言の真理条件) 任意の文 A, B について、$A \bigtriangledown B$ が真であるのは、A か B のどちらか一方のみが真であるとき、かつそのときに限る。

P	Q	$P \bigtriangledown Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$P \bigtriangledown Q$（P か Q のどちらか一方である）は、意味を考えれば、「通常の選択的選言 $P \vee Q$ であって、P と Q が共に成り立つことはない（$\neg(P \wedge Q)$）」ということであり、

$$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

と同じ意味であることがわかる。

（後で見るように $P \bigtriangledown Q$ と $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$ は同じ真理表を持つことが確認できる。）

1.6　練習問題：4 枚カード問題（改：飲酒年齢規則）

あなたは勤務中の警官であると想像してください。あなたの仕事は、人々がある規則を守っているかどうかを確かめることです。あなたの前にあるカードには、テーブルについている 4 人の人々についての情報が書かれています。カードの片面には人の年齢、カードのもう一方の面にはその人が飲んでいるものが書かれています。規則は次の通りです。

「**もしある人がビールを飲んでいるならば、その人は 20 歳以上でなければならない**」

人々が規則に違反しているかどうかを決定するために明らかに必要なカードを選んでください。

ビール	コーラ	24 歳	17 歳

1. **「ビール」について**
   ビールを飲んでいる人が 20 歳以上なら規則に抵触しないが、20 歳未満だったら規則に反する。つまり、「ビール」の裏が「20 歳以上」なら規則に沿っているが、「ビール」の裏が「20 歳未満」だった場合、規則に反する。

   従って「ビール」は裏返してみないとならない。

2. **「24 歳」について**
   20 歳以上の人がコーラを飲もうがビールを飲もうが飲酒規則には抵触しない。つまり、「24 歳」の裏は「ビール」でも「コーラ」でも（「ビール」でなくても）どちらでも構わない。

   従って「24 歳」は裏返す必要はない。

3. **「コーラ」について**
   コーラを飲んでいる人が 20 歳以上でも 20 歳未満でも飲酒規則には抵触しない。つまり、「コーラ」の裏は「24 歳」でも「17 歳」でもどちらでも構わない。

   従って「コーラ」は裏返す必要はない。

4. **「17 歳」について**
   17 歳の人がコーラを飲んでいても規則に反しないが、17 歳の人がビールを飲んでいたら規則に反する。つまり、「17 歳」の裏が「コーラ」なら規則に抵触しないが、「ビール」なら規則に反する。

   従って「17 歳」は裏返さなければならない。

ビール	20 歳以上	◯
	20 歳未満	×
コーラ（ビールでない）	20 歳以上	◯
	20 歳未満	◯
24 歳	ビール	◯
	コーラ（ビールでない）	◯
17 歳	ビール	×
	コーラ（ビールでない）	◯

- 即ち、「ビールを飲んでいる人」と「17 歳」が飲酒規則を守っているかどうかに関係ある。
- 「コーラを飲んでいる人」と「24 歳」は飲酒規則を守っているかどうかには関係ない。

「ビールを飲んでいるなら、その人は 20 歳以上でなければならない」を

$$\text{ビール} \to 20\text{ 歳以上}$$

と表して、上の表をさらにまとめると

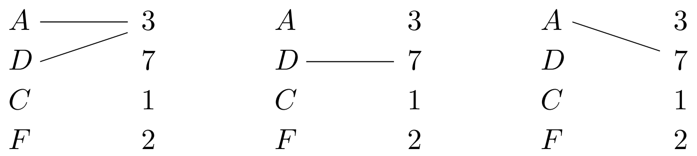
ビール	20 歳以上	ビール → 20 歳以上
◯	◯	◯
◯	×	×
×	◯	◯
×	×	◯

これが含意結合子の真理表に他ならない。

1.7 練習問題：4 枚カード問題（ウェイソンの選択課題）

$$\boxed{A} \quad \boxed{D} \quad \boxed{3} \quad \boxed{7}$$

- 片面に英文字が 1 つ（$A \sim Z$）、逆面に数字が 1 つ（$1 \sim 9$）書かれたカードがある。
- 「**もしカードの片面が A であれば、その裏面は 3 である**」という文が真であるか偽であるか、を確かめるためには、どのカードを裏返す必要があるか？（複数可。）



状況 1　　状況 2　　状況 3

1. $\boxed{A}$ **について**

   A の裏が 3 なら「A の裏が 3」という主張に沿っているが、A の裏が 3 でなかった場合、「A の裏が 3」という主張に反することになる。

   従って A は裏返してみないとならない。（A を裏返さない人はいなかった。）

   ビールを飲んでいる人が 20 歳以上なら規則に抵触しないが、20 歳未満だったら規則に反する。つまり、「ビール」の裏が「20 歳以上」なら規則に沿っているが、「ビール」の裏が「20 歳未満」だった場合、規則に反する。従って「ビール」は裏返してみないとならない。

2. $\boxed{3}$ **について**

   「A の裏は 3」という主張は、「D の裏が 3 でない」ということは意味しない。つまり、D の裏が 3 であっても構わない。（状況 1）

   従って、3 の裏は A でも D でも（A でなくても）構わない。つまり 3 は裏返す必要はない。

   20 歳以上の人がコーラを飲もうがビールを飲もうが飲酒規則には抵触しない。つまり、「24 歳」の裏は「ビール」でも「コーラ」でも（「ビール」でなくても）どちらでも構わない。従って「24 歳」は裏返す必要はない。

3. $\boxed{D}$ **について**

   「A の裏は 3」という主張は、D の裏に関して何も主張していない。つまり、D の裏は 3 であっても 3 でなくても構わない。（状況 2）

   従って D は裏返す必要はない。

   コーラを飲んでいる人が 20 歳以上でも 20 歳未満でも飲酒規則には抵触しない。つまり、「コーラ」の裏は「24 歳」でも「17 歳」でもどちらでも構わない。従って「コーラ」は裏返す必要はない。

4. $\boxed{7}$ **について**

   7 の裏が D であっても「A の裏が 3」という主張に反することはないが、7 の裏が A であった場合、A の裏が 3 でなくなってしまい、主張に反する。（状況 3）

   従って 7 は裏返さなければならない。

   17 歳の人がコーラを飲んでいても規則に反しないが、17 歳の人がビールを飲んでいたら規則に反する。つまり、「17 歳」の裏が「コーラ」なら規則に抵触しないが、「ビール」なら規則に反する。従って「17 歳」は裏返さなければならない。

まとめると、

A	3	○
	$\neg 3$	$\times$
$D\ (\neg A)$	3	○
	$\neg 3$	○
3	A	○
	$\neg A$	○
$7\ (\neg 3)$	A	$\times$
	$\neg A$	○

- 即ち、$\boxed{A}$ と $\boxed{7}$ が「A の裏は 3」という主張の真・偽が変化し、影響する。
- $\boxed{D}$ と $\boxed{3}$ ではこの主張は常に真であり、影響しない。

「もしカードの片面が A であれば、その裏面は 3 である」を $A \to 3$ と表して、上の表をさらにまとめると

A	3	$A \to 3$
○	○	○
○	$\times$	$\times$
$\times$	○	○
$\times$	$\times$	○

これが含意結合子の真理表に他ならない。

1.8 練習問題：4 枚カード問題（改：都市と交通手段）

大阪	福岡	新幹線	飛行機

- 片面に 1 つの都市名、逆面に 1 つの交通手段が書かれたカードがある。
- 各カードはわたしがこれまでに行った旅行を表している。
- 「**大阪に行くときはいつも新幹線で行く**」という文が真であるか偽であるか、を確かめるためには、どのカードを裏返す必要があるか？（複数可。）

練習問題 1 上の問題に回答し、説明してください。

1.9　含意：条件法：仮定的接続詞

- 太郎が家にいれ**ば**、花子は留守だ。
- 太郎が家にいる**なら**、花子は留守だ。
- 太郎が家にいる**ならば**、花子は留守だ。
- 太郎が家にいる**ときはいつも**花子は留守だ。
- **もしも**太郎が家にいる**ならば**、花子は留守だ。

ここでは、以下の文について検討する。

太郎が家にいるならば花子は家にいる。

この文は次の二つの要素文からなる複合文である。

- 太郎は家にいる。（前件）
- 花子は家にいる。（後件）

これら二つの要素文はとくに、条件文の**前件**（条件文の前提部分）、**後件**（条件文の結論部分）と呼ばれる。

この二つの要素文と元の複合文との真理値の関係を検討すると以下のようになると考えられる。

太郎は家にいる	花子は家にいる	太郎が家にいるならば花子は家にいる
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

– 実際に太郎が家にいるという条件が満たされていて（前件が真で）、花子も家にいるとき（後件も真）には、確かに「太郎が家にいるならば花子は家にいる」という条件文は真になると認められる。

– また、太郎が家にいるという条件が満たされているのに（前件が真）、花子が家にいない（後件が偽）場合には、「太郎が家にいるならば花子が家にいる」という条件文は偽になると考えられる。

– 4 枚カードのときに見たように、太郎が家にいない（前件が偽）場合については、「太郎が家にいるなばら花子が家にいる」という条件文全体は真になる。

上の真理表のような含意（条件法）の意味の規定は、通常の含意（条件法）の一側面を取り出したものであり、必ずしも日常使用する全ての含意関係「ならば」の意味を捉えているわけではない。とりあえずの論理学や数学の分析上は上の真理表によって規定される「ならば」の意味だけを考察することで充分である。

定義 5 (含意の真理条件) 任意の文 A, B について、$A \to B$ が真であるのは、A が偽であるか、B が真であるとき、かつそのときに限る。
言い換えれば、$A \to B$ が偽であるのは、A が真で、B が偽であるとき、かつそのときに限る。

A	B	$A \to B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

1.10 まとめ

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$\neg A$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T

1.11 補足：双条件

太郎が家にいるのは、花子が家にいるときかつそのときに限る。

というような文の真理表を考えてみると以下のようになる。

太郎は家にいる	花子は家にいる	太郎が家にいるのは花子が家にいるときかつそのときに限る
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

「P は Q のときそのときに限る」という真理関数を「双条件法」と呼び、「$P \leftrightarrow Q$」と書く。

定義 6 (双条件法の真理条件) 任意の文 A, B について、$A \leftrightarrow B$ が真であるのは、A と B がともに真であるとき、または A と B がともに偽であるとき、かつそのときに限る。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

1.12 真理値分析

一般の論理式（複合文）の真理値は、それを構成している論理式（文）の真理値によって定まる。ある論理式（複合文）がどのような真理値を取るのか（真か偽か）を知りたいときには、その論理式（複合文）に含まれる原子論理式（要素文）P や Q 等の全ての真理値の組み合わせについて当の論理式（複合文）の真偽を調べれば良い。このように、与えられた論理式がどのような真理値を取るのかを明らかにする作業を、与えられた論理式に対する**真理値分析**と呼ぶ。

実際に、以下の例について真理値分析を行ってみる。

例 1 $\neg(P \wedge \neg Q)$

1. **まず、与えられた論理式がどような論理式から構成されているかを確認する。**

   上の論理式は、原子論理式 P と Q から、論理結合子 $\neg$ と $\wedge$ を用いて以下のようにして構成されている。

$$\dfrac{\dfrac{P \quad \dfrac{Q}{\neg Q}}{P \wedge \neg Q}}{\neg(P \wedge \neg Q)}$$

2. **分析対象となる論理式に含まれる原子論理式を表の左側に書き出す。**

   ここでは、P と Q である。

3. **原子論理式の取り得る真理値の組み合わせをすべて列挙する。**

   P の取り得る真理値は T か F かの 2 通りであり、そのそれぞれに対して Q の取り得る真理値も T か F の 2 通りである。従って、P と Q の取り得る真理値の組み合わせは、(T, T), (T, F), (F, T), (F, F) の 4 通りである。

4. **分析対象となる論理式に含まれる、より単純な論理式について、真理表に従って真理値分析を行う。**

   (a) まず、$\neg Q$ について、Q の真理値を基に $\neg$ の真理表を適用して、$\neg Q$ の真理値を書き込む。

   (b) 次に $P \wedge \neg Q$ について、P と $\neg Q$ の真理値を基に $\wedge$ の真理表を適用して、$P \wedge \neg Q$ の真理値を書き込む。

5. **最後に、分析対象となる論理式の真理値を求める。**

   これまでに求めた $P \wedge \neg Q$ の真理値を基に $\neg$ の真理表を適用して、$\neg(P \wedge \neg Q)$ の真理値を書き込む。

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

例 2 $\neg P \to (Q \vee R)$

1. まず、分析対象となる論理式に含まれる原子論理式を表の左側に書き出す。

   ここでは、P と Q と R である。

2. 原子論理式の取り得る真理値の組み合わせをすべて列挙する。

   P の取り得る真理値は T か F かの 2 通りであり、そのそれぞれに対して Q の取り得る真理値も T か F の 2 通りである。従って、P と Q の取り得る真理値の組み合わせは、(T, T), (T, F), (F, T), (F, F) の 4 通りである。さらにそのそれぞれに対して、R の取り得る真理値も T か F かの 2 通りである。従って、P と Q と R の取り得る真理値の組み合わせは、
   ((T, T), T), ((T, T), F), ((T, F), T), ((T, F), F), ((F, T), T), ((F, T), F), ((F, F), T), ((F, F), F)
   の 8 通りである。

3. 次に、分析対象となる論理式に含まれる、より単純な論理式について、真理表に従って真理値を求める。

   (a) まず、$\neg P$ について、P の真理値を基に $\neg$ の真理表を適用して、$\neg P$ の真理値を書き込む。

   (b) 次に $Q \vee R$ について、Q と R の真理値を基に $\vee$ の真理表を適用して、$Q \vee R$ の真理値を書き込む。

4. 最後に、分析対象となる論理式の真理値を求める。

   これまでに求めた $\neg P$ と $Q \vee R$ の真理値を基に $\to$ の真理表を適用して、$\neg P \to (Q \vee R)$ の真理値を書き込む。

P	Q	R	$\neg P$	$Q \vee R$	$\neg P \to (Q \vee R)$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F

例 3 (練習) $((P \to Q) \wedge P) \to Q$

例 3 のように、原子論理式の真理値によらず恒に真となる論理式を**トートロジー**と呼ぶ。また、原子論理式の真理値によらず恒に偽となる論理式を**矛盾式**と呼ぶ。

言い方を変えれば、トートロジーはどのような状況（原子論理式が真となる状況）においても必ず真になる（成り立つ）論理式、と考えられる。

練習問題 2 次の真理関数の真理値分析をしてください。

A	B	$A \land B$	$A \lor B$	$A \to B$	$\neg A$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T

1. $\neg P \to Q$
2. $\neg(P \lor Q)$
3. $\neg P \land \neg Q$
4. $(P \land \neg Q) \to R$
5. $\neg(P \land Q)$
6. $\neg P \lor \neg Q$
7. $(P \to Q) \to (Q \to P)$
8. $((P \to Q) \land (Q \to R)) \to (P \to R)$
9. $(\neg P \land Q) \to (P \to Q)$
10. $(P \to \neg Q) \land (Q \land P)$
11. $(P \to Q) \land (P \to \neg Q)$
12. $(P \to Q) \lor (\neg P \to Q)$

練習問題 3 次の真理関数の真理値分析をしてください。

1. $P \lor \neg P$
2. $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$
3. $\neg(P \land (Q \lor R)) \to \neg P$
4. $(\neg P \land (P \lor Q)) \to Q$
5. $((P \to Q) \to P) \to P$
6. $(\neg Q \land (P \to Q)) \to \neg P$
7. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \land Q) \to R)$
8. $((P \land Q) \to R) \to (P \to (Q \to R))$

練習問題 4 次の真理関数の真理値分析をしてください。

1. $P \to P$ （同一律：law of identity）
2. $P \vee \neg P$ （排中律：law of the excluded middle）
3. $\neg(P \wedge \neg P)$ （矛盾律：law of contradiction）
4. $(\neg\neg P \to P) \wedge (P \to \neg\neg P)$ （二重否定律：law of double negation）
5. $((P \wedge P) \to P) \wedge (P \to (P \wedge P))$ （冪等律：idempotent law）
6. $((P \vee P) \to P) \wedge (P \to (P \vee P))$ （冪等律：idempotent law）
7. $((P \wedge Q) \to (Q \wedge P)) \wedge ((Q \wedge P) \to (P \to Q))$ （交換律：commutative law）
8. $((P \vee Q) \to (Q \vee P)) \wedge ((Q \vee P) \to (P \vee Q))$ （交換律：commutative law）
9. $((P \wedge (Q \wedge R)) \to ((P \wedge Q) \wedge R))$
10. $((P \wedge (P \vee Q)) \to P) \wedge (P \to (P \wedge (P \vee Q)))$ （吸収律：absorptive law）
11. $((P \vee (P \wedge Q)) \to P) \wedge (P \to (P \vee (P \wedge Q)))$ （吸収律：absorptive law）
12. $\neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$
13. $(\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P \wedge Q)$ （ドモルガンの法則：De Morgan's law）
14. $\neg(P \vee Q) \to (\neg P \wedge \neg Q)$
15. $(\neg P \wedge \neg Q) \to \neg(P \vee Q)$ （ドモルガンの法則：De Morgan's law）
16. $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$
17. $(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$（対偶律：law of contraposition）
18. $(\neg P \wedge (P \vee Q)) \to Q$ （選言的三段論法：disjunctive syllogism）
19. $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$ （推移律：transitive law）
20. $((P \to Q) \wedge P) \to Q$ （前件肯定式　modus ponens）
21. $(\neg Q \wedge (P \to Q)) \to \neg P$ （否定式：modus tollens）
22. $P \to (P \vee Q)$
23. $Q \to (P \vee Q)$ （拡大律　付加律：law of addition）
24. $(P \wedge Q) \to P$
25. $(P \wedge Q) \to Q$ （縮小律：law of simplification）
26. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \wedge Q) \to R)$ （移入律：law of importation）

27. $((P \wedge Q) \to R) \to (P \to (Q \to R))$ （移出律：law of exportation）

28. $((P \to R) \wedge (Q \to R)) \to ((P \vee Q) \to R)$ （構成的両刀論法：constructive dilemma）

29. $P \to (Q \to P)$ （添加律）

30. $\neg P \to (P \to Q)$

31. $((P \to Q) \to P) \to P$ （パースの法則：Peirce's law）

32. $P \to (Q \to (P \wedge Q))$ （law of adjunction）

33. $(P \to Q) \to ((P \to R) \to (P \to (Q \wedge R)))$ （合成律：law of composition）

34. $(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q)$

35. $(P \to Q) \vee (\neg P \to Q)$

36. $((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \to (P \to (P \wedge Q))$