論理学入門

水曜1時間目　9：00–; 1402 教室　・　金曜5時間目　16：20–；1502 教室

1　証明論

これまでは、論理的意味論（セマンティクス）の観点に基づいた推論分析の方法論を勉強してきた。とくに、与えられた推論が妥当であるかそうでないかを判定するための真理値分析という方法を学んできた。真理値分析の手法は機械的で誰にでも簡単に行えるという利点がある一方で、原子論理式（原子文）の数が増えると真理表の行数が増えてしまい、真理表の作成が（実際には）困難になるという難点がある。また、意味論的な推論分析では与えられた推論の分析が主眼であり、どのように推論を進めて行けば妥当な結論が得られるのかについて明確な指針は与えてくれない。

これに対して証明論では、無数にある妥当な推論のなかから、いくつかの妥当な推論のパターンが推論規則（基本型）として抽出され、それらの積み重ねによって得られる推論が妥当な推論として特徴づけられる。ここではこのような証明論の観点に基づいた推論分析手法を見ていく。

1.1　「正しい推論」の基準：証明論の観点から

証明論の観点に基づく妥当な推論の基準は以下のものである。

前提から結論へ至る**誰もが納得する「道筋」**がある、
前提から**誰もが納得する論法によって結論を導く**ことができる、
そのときにその推論は妥当である（正しい）と言われる。

前提 前提 ··· 前提
⋮
結論

この考え方に基づくと、ナミヘイの推論が正しいことは、以下のようにして示される。

例 1　**前提 1**　サザエかカツオが犯人だ。

前提 2　サザエが犯人なら、カツオも犯人だ。

結論　故にカツオは犯人だ。

- 前提1で、サザエかカツオのどちらかが犯人であることが分かっているので、例えば、カツオが犯人であるとしてみれば、これはそのまま結論である。
- では、サザエが犯人であるとしてみる。すると、前提2から、サザエが犯人ならカツオも犯人である、ことが分かっているので、結局、カツオも犯人であることが分かる。（**Modus Ponens という推論規則**）

- したがって、サザエが犯人であるとしても、カツオが犯人であるとしてもどちらにしても、カツオが犯人であることが結論される。（**場合分け論法という推論規則**）
- したがって前提 1 と前提 2 から、「カツオが犯人である」という結論を導くことができるため、この推論は正しい推論であると言える。

ここでは、**Modus Ponens** と、**場合分け論法**という 2 つの論法が使われており、このようなものは誰もが認める、納得する論法（推論規則）であると考えられる。[1]

1.2 推論規則

証明論（シンタクス）の観点に基づいて推論を分析するためには、まず、無数にある妥当な推論のパターンのなかから、いくつかの基本型を推論規則として取り出さなければならない。その推論の基本型は、できるだけ単純なものが好ましく、また誰もが納得する確実なものでなければならない。推論規則としてどのようなものを選ぶか、についてはある程度任意性があり、研究目的によって異なる。ここでは、われわれが実際に推論において使っている論法をできるだけ忠実に形式化した Gentzen の自然演繹という推論体系を紹介する。

1.3 $\to$ 除去規則（Modus ponens）

以前みたように、以下の推論は妥当である。

前提 1 太郎は 100 点をとれば、単位をもらえる。
前提 2 太郎は 100 点をとった。
結論 故に太郎は単位をもらえた。

この推論を記号で表すと、「太郎は 100 点をとる」を P、「太郎は単位をもらえる」を Q として、以下のように表すことができる。

$$\frac{P \to Q \quad P}{Q}$$

ここで、横線——は線の上の 2 つの論理式（$P \to Q$ と P）から線の下の論理式（Q）を導いてよいことを表している。

このような推論は、数学においてもしばしば用いられるもっとも基本的な推論法則であり、自然演繹でも推論規則として採用される。この規則は一般に、$\to$ 除去規則（または Modus ponens）と呼ばれ、

「$X \to Y$ という形の論理式と X という論理式を導くこと
ができるときには、Y という論理式を導いてよい」

ことを表す推論規則として、以下のように定式化される。

[1] 上の Modus Ponens や場合分け論法のような推論規則は、**複数の論理式を一つの論理式に書き換える操作**とみなすことができる。従って「推論規則を重ねて議論を組み立てる」ということは、「推論規則という論理式の書換え手続きに従って論理式を書き換えていくこと」と見なすことができる。これが証明論（シンタクス）の考え方の特徴である。

以下では、「論理式 X を導くことができる」ということを $\begin{matrix}\vdots\\ X\end{matrix}$ のように表す。

$\to$ 除去規則（$\to E$ と略記する） $\begin{matrix}\vdots\\ X\to Y\end{matrix}$（論理式 $X\to Y$ が導ける）と $\begin{matrix}\vdots\\ X\end{matrix}$（論理式 X が導ける）が成り立つときには、以下のようにして論理式 Y を導いてよい。

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ X\to Y\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\\ X\end{matrix}}{Y}\to E$$

線——の横の $\to E$ は、$\to$ 除去規則を適用したことを表す印である。

推論規則はまさに推論の「型」であり、$\to E$ 規則の X や Y にはどんな論理式でも代入することができる。（数学の変数のようなものと思えばいい。）論理式の代入によって具体的な推論規則の適用例が得られる。たとえば、X に $C\wedge D$ を代入し、Y に $\neg F$ を代入すると、以下のような $\to E$ 規則の適用例が得られる。

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ (C\wedge D)\to\neg F\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\\ C\wedge D\end{matrix}}{\neg F}\to E$$

与えられたいくつかの前提（同じものを何度使ってもいい）から、何回かの推論規則の適用によって、結論に至る（下の例にあるような）木構造を、**自然演繹の証明図**と呼ぶ。

例 2 次の前提から結論へ至る証明図を構成してください。

前提 1 $A\to(B\to C)$
前提 2 $A\to B$
前提 3 A
結論 C

問題は、3 つの前提 $A\to(B\to C)$、$A\to B$、A を出発点として（前提とはすでに正しいことが分かっている、もしくは暫定的に正しいとされたものと考えてよい）、何回か $\to E$ 規則を繰り返し適用することで、結論 C を導くことである。すなわち、以下の $\vdots$ の部分を $\to E$ 規則の適用例で埋めることである。

$$\begin{matrix}A\to(B\to C)\quad A\to B\quad A\\ \ddots\;\vdots\;\dots\\ C\end{matrix}$$

与えられた 3 つの前提のうちで、どの論理式に対して $\to E$ 規則が適用できるかを考える。3 つの前提のうちの $A\to(B\to C)$ と A を選んで、$\to E$ 規則の X に A を代入して、Y に $B\to C$ を代入すれば、以下のような $\to E$ 規則の適用例が得られる。

$$\dfrac{A\to(B\to C)\quad A}{B\to C}\to E$$

また、$A \to B$ と（もう一度）A を選んで、$\to E$ 規則の X に A を代入して、Y に B を代入すれば、以下のような適用例が得られる。

$$\dfrac{A \to B \quad A}{B} \to E$$

上の $\to E$ 規則の適用によって得られた 2 つの論理式 $B \to C$ と B は、次からは（正しいことが証明された論理式として）、前提と同じように使ってよい。したがって、いま手持ちの使える論理式は 3 つの前提 $A \to (B \to C)$、$A \to B$、A と、$B \to C$、B の合計 5 つである。この 5 つの論理式に対して再び $\to E$ 規則を適用して結論 C を得ることを目指す。

$$\begin{array}{c} \dfrac{A \to (B \to C) \quad A}{B \to C} \qquad \dfrac{A \to B \quad A}{B} \\ \vdots \\ C \end{array}$$

これらの（正しいことがすでに分かっている）5 つの論理式のうちで、どの論理式に対して $\to E$ 規則が適用できるかを再び考える。いくつか組み合わせはありうるが、目標は C を導くことであり、$B \to C$ と B を選んで、$\to E$ 規則の X に B、Y に C を代入すれば、以下のような適用例が得られる。

$$\dfrac{B \to C \quad B}{C} \to E$$

したがって最終的に、前提から結論 C への証明図は以下のようになる。

$$\dfrac{\dfrac{A \to (B \to C) \quad A}{B \to C} \to E \qquad \dfrac{A \to B \quad A}{B} \to E}{C} \to E$$

練習問題 3 以下の前提から結論への自然演繹の証明図をかいて下さい。

1. **前提 1** $(A \to B) \to C$
   前提 2 $A \to B$
   結論 C
2. **前提 1** $A \to B$
   前提 2 $B \to C$
   前提 3 A
   結論 C
3. **前提 1** $A \to (A \to B)$
   前提 2 A
   結論 B
4. **前提 1** $(A \wedge B) \to (C \vee D)$
   前提 2 $(C \vee D) \to E$
   前提 2 $A \wedge B$
   結論 E
5. **前提 1** $(A \to C) \to (\neg B \to (C \vee D))$
   前提 2 $(A \to C) \to \neg B$
   前提 3 $(A \to C)$
   結論 $C \vee D$
6. **前提 1** $(A \vee C) \to ((A \vee C) \to (B \to \neg D))$
   前提 2 $A \vee C$
   前提 3 B
   結論 $\neg D$

1.4　$\wedge$ 導入規則

以下の推論は、容易に妥当だと確かめられ、また誰もが納得するもっとも基本的な推論であると考えられる。

前提 1 夜神月は犯人である。
前提 2 夜神月は凶器をもっている。
結論 夜神月は犯人であり、凶器をもっている。

この推論は以下のように表現される。

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}$$

この推論は、一般に $\wedge$ 導入規則と呼ばれ、

「X という論理式と Y という論理式が導けるときには、
$X \wedge Y$ という論理式を導いてよい」

ことを表す推論規則として、以下のように定式化される。

$\wedge$ 導入規則（$\wedge I$ と略記する） $\begin{array}{c}\vdots\\ X\end{array}$（論理式 X が導ける）と $\begin{array}{c}\vdots\\ Y\end{array}$（論理式 Y が導ける）が成り立つときには、以下のようにして論理式 $X \wedge Y$ を導いてよい。

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ X\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ Y\end{array}}{X \wedge Y}\ \wedge I$$

練習問題 4 以下の推論が正しいことを示してください。

1. **前提 1** $(A \wedge B) \to C$
   前提 2 A
   前提 3 B
   結論 C
2. **前提 1** $(A \wedge B) \to C$
   前提 2 $(A \wedge B) \to D$
   前提 3 A
   前提 4 B
   結論 $C \wedge D$
3. **前提 1** $A \to B$
   前提 2 $A \to C$
   前提 3 A
   結論 $B \wedge C$
4. **前提 1** $((A \to B) \wedge C) \to D$
   前提 2 $E \to (A \to B)$
   前提 3 $E \to C$
   前提 4 E
   結論 D
5. **前提 1** $A \to (B \wedge C)$
   前提 2 $A \to D$
   前提 3 A
   結論 $(B \wedge C) \wedge D$
6. **前提 1** $A \to (B \to C)$
   前提 2 A
   前提 3 B
   結論 $A \wedge C$
7. **前提 1** $A \to (B \to C)$
   前提 2 A
   結論 $A \wedge (B \to C)$

1.5　$\wedge$ 除去規則

以下の推論は、容易に妥当だと確かめられ、また誰もが納得するもっとも基本的な推論であると考えられる。

前提 1 夜神月も弥海砂も犯人である。

結論 夜神月は犯人である。

左の推論は以下のように表現される。

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

同様に、

前提 1 夜神月も弥海砂も犯人である。

結論 弥海砂は犯人である。

左の推論は以下のように表現される。

$$\frac{P \wedge Q}{Q}$$

これらの推論は一般に、$\wedge$ 除去規則と呼ばれ、

「$X \wedge Y$ という論理式が導けるときには、X という論理式を導いてよい」
「$X \wedge Y$ という論理式が導けるときには、Y という論理式を導いてよい」

ことを表す推論規則として、以下のように定式化される。

$\wedge$ 除去規則（$\wedge E$ と略記する） $\begin{array}{c}\vdots\\ X \wedge Y\end{array}$ が成り立つときには、

以下のようにして論理式 X を導いてよい。

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \dfrac{X \wedge Y}{X}\ \wedge E1\end{array}$$

同様に、以下のようにして論理式 Y を導いてよい。

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \dfrac{X \wedge Y}{Y}\ \wedge E2\end{array}$$

$\wedge E1$ 規則の数字の 1 は、$X \wedge Y$ の $\wedge$ の左側から結論（X）が得られることを表し、それに対して $\wedge E2$ 規則の 2 は、$X \wedge Y$ の $\wedge$ の右側から結論（Y）が得られることを表している。これらの数字は省略してもよい。

練習問題 5 以下の推論が正しいことを示してください。

1. **前提 1** $A \wedge B$
   前提 2 $A \to (C \wedge D)$
   結論 D
2. **前提 1** $A \wedge (B \to C)$
   前提 2 $A \to B$
   結論 C
3. **前提 1** $A \wedge (B \wedge C)$
   結論 $(A \wedge B) \wedge C$
4. **前提 1** $A \wedge (A \to B)$
   結論 B
5. **前提 1** $A \wedge (B \wedge C)$
   前提 2 $B \to D$
   結論 $C \wedge D$
6. **前提 1** $(A \to B) \wedge (C \to D)$
   前提 2 $A \wedge C$
   結論 $B \wedge D$
7. **前提 1** $(A \to (B \wedge E)) \wedge (C \to (B \to F))$
   前提 2 $A \wedge C$
   結論 F
8. **前提 1** $(((A \wedge B) \wedge C) \wedge D)$
   結論 $(A \wedge C) \wedge (B \wedge D)$

1.6 → 導入規則

次は、→ 導入規則であるが、この規則はこれまでの規則とは少し違った形をしている。まずは、以下の例について考えてみる。

例 6 **前提 1** タロウが犯人なら、ジロウも犯人である。

前提 2 タロウが犯人なら、サブロウも犯人である。

結論 タロウが犯人なら、ジロウもサブロウも犯人である。

この推論が妥当であることは以下のようにして示すことができる。

1. 問題は、2 つの前提 タロウ → ジロウ および タロウ → サブロウ と、結論 タロウ → (ジロウ ∧ サブロウ) の間の $\vdots$ を埋めることである。

$$\begin{array}{c} \text{タロウ} \to \text{ジロウ} \qquad \text{タロウ} \to \text{サブロウ} \\ \ddots \vdots \iddots \\ \text{タロウ} \to (\text{ジロウ} \wedge \text{サブロウ}) \end{array}$$

2. ここで結論は条件法 → の形をしており、その意味は「**仮にタロウが犯人だと仮定すると**、ジロウもサブロウも犯人である」ということである。すなわち、「タロウが犯人である」ということを**暫定的な仮定として前提に加えて**、「ジロウもサブロウも犯人である」という結論を導けばよいのである。したがって、問題は以下の $\vdots$ を埋めればよいことになる。

$$\begin{array}{c} [\text{タロウ}]^1 \quad \text{タロウ} \to \text{ジロウ} \quad \text{タロウ} \to \text{サブロウ} \\ \ddots \vdots \iddots \\ \dfrac{\text{ジロウ} \wedge \text{サブロウ}}{\text{タロウ} \to (\text{ジロウ} \wedge \text{サブロウ})} \ 1 \end{array}$$

   - ここで、「タロウは犯人である」は、暫定的な仮定であるため、[ ] を付けて他の前提と区別する。
   - また一般には、他にも暫定的な仮定が増える可能性があるため、それらと区別するために数字を振って $[\text{タロウ}]^1$ のように表す。
   - さらに、「暫定的な仮定を前提として加える」という操作を表す横線——にも対応する数字を振っておく。

   このような、結論が条件法のときに「**暫定的な仮定を前提として加える**」という操作が $\to I$ 規則である。

   暫定的な仮定は勝手に加えてはならない。 結論が条件法 → の形をしているときに、その前件を暫定的な仮定として加えてよいのである。

3. あとはこれまでと同様に上の $\vdots$ の部分を埋めればいい。このとき、$[\text{タロウ}]^1$ という暫定的な仮定は、他の前提と同じように使うことができる。すなわち、いま手持ちの使える論理式は $[\text{タロウ}]^1$、タロウ → ジロウ、タロウ → サブロウ の 3 つであり、目標は ジロウ ∧ サブロウ という論理式を導くことである。

4. 手持ちの 3 つの論理式の組み合わせを考えると、$[\text{タロウ}]^1$ と タロウ $\to$ ジロウ を選んで $\to E$ 規則を適用すると以下の適用例が得られる。

$$\dfrac{\text{タロウ} \to \text{ジロウ} \quad [\text{タロウ}]^1}{\text{ジロウ}} \to E$$

また、$[\text{タロウ}]^1$ と タロウ $\to$ サブロウ を選んで $\to E$ 規則を適用すると以下の適用例が得られる。

$$\dfrac{\text{タロウ} \to \text{サブロウ} \quad [\text{タロウ}]^1}{\text{サブロウ}} \to E$$

したがって、以下のようになる。

$$\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\text{タロウ} \to \text{ジロウ} \quad [\text{タロウ}]^1}{\text{ジロウ}} \qquad \dfrac{\text{タロウ} \to \text{サブロウ} \quad [\text{タロウ}]^1}{\text{サブロウ}} \\ \vdots \\ \text{ジロウ} \land \text{サブロウ}\end{matrix}}{\text{タロウ} \to (\text{ジロウ} \land \text{サブロウ})}\ 1$$

5. いま使える論理式は、$[\text{タロウ}]^1$、タロウ $\to$ ジロウ、タロウ $\to$ サブロウ、ジロウ、サブロウ の 5 つであり、目標は ジロウ $\land$ サブロウ を導くことである。

   このなかから ジロウ と サブロウ を選んで $\land I$ 規則を適用すれば証明図は完成する。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{タロウ} \to \text{ジロウ} \quad [\text{タロウ}]^1}{\text{ジロウ}} \to E \qquad \dfrac{\text{タロウ} \to \text{サブロウ} \quad [\text{タロウ}]^1}{\text{サブロウ}} \to E}{\text{ジロウ} \land \text{サブロウ}} \land I}{\text{タロウ} \to (\text{ジロウ} \land \text{サブロウ})}\ 1$$

上の説明は、証明図の構成をパズルとみなす観点から与えられているが、今度は、証明図を上から順に読む、という観点から考えてみる。

1. 結論の主張は、「タロウが犯人である」という仮定のもとでは、「ジロウもサブロウも犯人である」ということである。すなわち、

$$\begin{matrix}\text{タロウ} \\ \vdots \\ \text{ジロウ} \land \text{サブロウ}\end{matrix}$$

   ということであり、この $\vdots$ の部分を推論規則によって埋めることができる、ということがこの結論の主張である。

2. すると、「タロウが犯人である」という仮定と前提 1 より、$\to$ 除去規則を用いて「ジロウが犯人である」ことが帰結する。

$$\begin{matrix}\dfrac{\overset{\text{前提 1}}{\text{タロウ} \to \text{ジロウ}} \quad \overset{\text{仮定}}{\text{タロウ}}}{\text{ジロウ}} \to E \\ \vdots \\ \text{ジロウ} \land \text{サブロウ}\end{matrix}$$

3. 同様に、「タロウが犯人である」という仮定と前提2より、$\to$ 除去規則を用いて「サブロウが犯人である」ことが帰結する。

$$\dfrac{\overset{\text{前提}1}{\text{タロウ}\to\text{ジロウ}}\qquad\overset{\text{仮定}}{\text{タロウ}}}{\text{ジロウ}}\to E\qquad\dfrac{\overset{\text{前提}2}{\text{タロウ}\to\text{サブロウ}}\qquad\overset{\text{仮定}}{\text{タロウ}}}{\text{サブロウ}}\to E$$
$$\vdots$$
$$\text{ジロウ}\land\text{サブロウ}$$

4. 従って、$\land$ 導入規則を用いることにより、「ジロウもサブロウも犯人である」ことが帰結する。すなわち、**「タロウが犯人である」という仮定の下で、「ジロウもサブロウも犯人である」ことが帰結する。**

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{前提}1}{\text{タロウ}\to\text{ジロウ}}\qquad\overset{\text{仮定}}{\text{タロウ}}}{\text{ジロウ}}\to E\qquad\dfrac{\overset{\text{前提}2}{\text{タロウ}\to\text{サブロウ}}\qquad\overset{\text{仮定}}{\text{タロウ}}}{\text{サブロウ}}\to E}{\text{ジロウ}\land\text{サブロウ}}\land I$$

5. ここで、**「「タロウが犯人である」という仮定から「ジロウもサブロウも犯人である」という結論が導ける」**ということと**「タロウが犯人ならば、ジロウもサブロウも犯人である」**という主張は同じ意味を持っているために、「タロウが犯人ならば、ジロウもサブロウも犯人である」ことを結論することができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{前提}1}{\text{タロウ}\to\text{ジロウ}}\qquad\overset{\text{仮定}}{\text{タロウ}}}{\text{ジロウ}}\to E\qquad\dfrac{\overset{\text{前提}2}{\text{タロウ}\to\text{サブロウ}}\qquad\overset{\text{仮定}}{\text{タロウ}}}{\text{サブロウ}}\to E}{\text{ジロウ}\land\text{サブロウ}}\land I}{\text{タロウ}\to\text{ジロウ}\land\text{サブロウ}}\clubsuit$$

この最後のステップ（$\clubsuit$ 部分）が $\to$ 導入規則と呼ばれる推論規則である。

ここで、以下の2つの主張は先にも述べたとおりに意味内容は同じであるが、ある重要な点で決定的に異なっている。

- 「「タロウが犯人である」という仮定から「ジロウもサブロウも犯人である」という結論が導ける」
- 「タロウが犯人ならば、ジロウもサブロウも犯人である」

その相違点とは、上の主張では**仮定「タロウが犯人である」**と**結論「ジロウもサブロウも犯人である」**が明確に分離されているのに対して、下の主張ではそれらをまとめてひとつの**結論「タロウが犯人ならばジロウもサブロウも犯人である」**として主張しており、この結論に対してはもはやなんの仮定も置かれていないことである。

$\to$ 導入規則（$\to I$ 規則と略記する）とは、このような**仮定を結論に組み込む操作（推論法則）**のことなのである。（暫定的な）仮定が結論に組み込まれると、その仮定はもはや結論を主張するためには不要な仮定となり、そのことを**仮定を閉じる**と言い表し、証明

図の中ではカッコ [ ] で括って表現する。それに対してすでに与えられた前提や閉じられていない仮定は**開いた前提**や**開いた仮定**などと呼ばれる。

上の推論を（仮定を閉じる操作を明示して）正しい図式で表すと以下のようになる。

$$\dfrac{\dfrac{\text{タロウ} \to \text{ジロウ} \quad [\text{タロウ}]^1}{\text{ジロウ}} \to E \quad \dfrac{\text{タロウ} \to \text{サブロウ} \quad [\text{タロウ}]^1}{\text{サブロウ}} \to E}{\dfrac{\text{ジロウ} \wedge \text{サブロウ}}{\text{タロウ} \to (\text{ジロウ} \wedge \text{サブロウ})} \to I, 1} \wedge I$$

ここで、$[\text{タロウ}]^1$ という表記は、「タロウが犯人である」という仮定が、「ジロウもサブロウも犯人である」という文を導くために用いられ、最後のステップ $\to I$ 規則によって結論「タロウが犯人ならばジロウもサブロウも犯人である」に組み込まれ、閉じられたことを表している。また $[\text{タロウ}]^1$ の数字の 1 は、$\to I, 1$ の 1 に対応しており、この $\to I$ 規則によって $[\text{タロウ}]^1$ という仮定が閉じられたことを表している。

また、「タロウ $\to$ ジロウ」や、「タロウ $\to$ サブロウ」は開いた前提である。

$\to$ 導入規則は一般に、

「$X \to Y$ という論理式を導くためには、
X を暫定的な仮定として前提に加えて、Y を導けばよい」
もしくは「X という仮定から Y という論理式が導けるときには、
X という仮定を [ ] で括って（除去して）$X \to Y$ という論理式を導いてよい」

ことを表す推論規則として、以下のように定式化される。

$\to$ 導入規則（$\to I$ と略記する） $\begin{array}{c} X \\ \vdots \\ Y \end{array}$（$X$ という仮定から論理式 Y が導ける）が成り立つとき、以下のように仮定 X を（いくつか）[ ] で括って、論理式 $X \to Y$ を導いてよい。

$$\dfrac{\begin{array}{c} [X]^n \\ \vdots \\ Y \end{array}}{X \to Y} \to I, n$$

ここで、仮定 X をカッコ [ ] で括る操作により、**仮定 X は「閉じられる」**といい、証明のどの段階で仮定が閉じられたのかを明示するために、カッコ [ ] および対応する $\to$ 導入規則には、自然数の添え字 n を付ける。なお、閉じられていない仮定は「開いた仮定」と呼ばれる。

仮定を閉じる際に、**一度にいくつかの仮定を同時に閉じてよい**ことに注意。

例 7　前提 1 $D \to (A \to (B \wedge C))$

結論 $D \to (A \to B)$

1.

$$\begin{array}{c} D \to (A \to (B \land C)) \\ \vdots \\ D \to (A \to B) \end{array}$$

2.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[D]^1 \quad D \to (A \to (B \land C)) \\ \vdots \\ A \to B\end{array}}{D \to (A \to B)}\ 1$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[A]^2 \quad [D]^1 \quad D \to (A \to (B \land C)) \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B}\ 2}{D \to (A \to B)}\ 1$$

4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{D \to (A \to (B \land C)) \quad [D]^1}{A \to (B \land C)} \to E \qquad [A]^2}{B \land C} \to E}{B} \land E}{A \to B} \to I, 2}{D \to (A \to B)} \to I, 1$$

練習問題 8 以下の推論が正しいことを示してください。

1. **前提 1** $A \to B$
   前提 2 $B \to C$
   結論 $A \to C$

2. **前提** $A \to (C \land D)$
   結論 $A \to D$

3. **前提 1** $A \to (A \to B)$
   結論 $A \to B$

4. **前提 1** $(A \land B) \to C$
   結論 $A \to (B \to C)$

5. **前提 1** $A \to (B \to C)$
   結論 $(A \land B) \to C$

6. **前提 1** $(A \land B) \to C$
   前提 2 $(A \land B) \to D$
   結論 $A \to (B \to (C \land D))$

7. **前提 1** A
   結論 $(A \to B) \to B$

8. **前提 1** $A \to B$
   結論 $((A \to B) \to B) \to B$

9. **前提 1** $A \to (B \land C)$
   結論 $(A \to B) \land (A \to C)$

10. **前提 1** $(A \to B) \land (A \to C)$
    結論 $A \to (B \land C)$

1.7 証明図の構成戦略

これまでに学んだ推論規則は、$\to I, \to E, \wedge I, \wedge E$ 規則であるが、これらの推論規則（後で見る否定に関する規則も加える）を用いた自然演繹の証明は、以下の方法である程度機械的に構成することができる。

1. 前提を上に、結論を下に書く。
2. まず結論の形に着目する。
   (a) 結論が $\wedge$ の形のときは、最後の規則を $\wedge I$ 規則とする。
   (b) 結論が $\to$ の形のときは、最後の規則を $\to I$ 規則とする。
3. 結論が $\wedge$ の形でもなく、$\to$ の形でもないときは、前提に着目する。
   (a) 前提が $\wedge$ の形のときは、すぐに $\wedge E$ 規則を適用する。
   (b) 前提が $\to$ の形のときは、（可能であれば）$\to E$ 規則を適用する。

以下の例で考えてみる。

前提 1 $(A \to B) \wedge (A \to C)$

結論 $A \to (B \wedge C)$

1. **前提を上に、結論を下に書く。**

$$\begin{array}{c}(A \to B) \wedge (A \to C)\\ \vdots \\ A \to (B \wedge C)\end{array}$$

問題は、前提と結論の間を推論規則でつなぐこと。

2. **まず結論の形に着目する。**

   (a) **結論が $\to$ の形のときは、最後の規則を $\to I$ 規則とする。**

$$\dfrac{\begin{array}{cc}(A \to B) \wedge (A \to C) & [A]^1\\ \vdots & \\ B \wedge C & \end{array}}{A \to (B \wedge C)} \to I, 1$$

すると問題は、2 つの前提 $(A \to B) \wedge (A \to C)$ 及び A と、結論 $B \wedge C$ の間を推論規則でつなぐという問題に還元される。

   (b) **結論が $\wedge$ の形のときは、最後の規則を $\wedge I$ 規則とする。**

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}(A \to B) \wedge (A \to C) \quad [A]^1\\ \vdots\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}(A \to B) \wedge (A \to C) \quad [A]^1\\ \vdots\\ C\end{array}}{B \wedge C} \wedge I}{A \to (B \wedge C)} \to I, 1$$

すると問題は、2 つの前提 $(A \to B) \wedge (A \to C)$ 及び A と結論 B の間を推論規則でつなぐ問題と、2 つの前提 $(A \to B) \wedge (A \to C)$ 及び A と結論 C の間を推論規則でつなぐ問題の 2 つに分割される。（前提はコピーされる。）

3. **結論が $\to$ の形でもなく、$\wedge$ の形でもないときは、前提に着目する。**

   (a) **前提が $\wedge$ の形のときは、すぐに $\wedge E$ 規則を適用する。**

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{(A\to B)\wedge(A\to C)}{A\to B}\wedge E \quad \dfrac{(A\to B)\wedge(A\to C)}{A\to C}\wedge E \quad [A]^1\\ \vdots \\ B\end{array}\qquad\begin{array}{c}\dfrac{(A\to B)\wedge(A\to C)}{A\to B}\wedge E \quad \dfrac{(A\to B)\wedge(A\to C)}{A\to C}\wedge E \quad [A]^1\\ \vdots \\ C\end{array}}{B\wedge C}\wedge I}{A\to(B\wedge C)}\to I,1$$

すると 2 つの問題はそれぞれ、3 つの前提 $A\to B$ 及び $A\to C$ 及び A と結論 B の間をつなぐ問題と、3 つの前提 $A\to B$ 及び $A\to C$ 及び A と結論 C の間をつなぐ問題とに還元される。

   (b) **前提が $\to$ の形のときは、（可能であれば）$\to E$ 規則を適用する。**

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{(A\to B)\wedge(A\to C)}{A\to B}\wedge E \quad [A]^1}{B}\to E \quad \dfrac{\dfrac{(A\to B)\wedge(A\to C)}{A\to C}\wedge E \quad [A]^1}{C}\to E\\ \vdots \\ B\end{array}\qquad\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{(A\to B)\wedge(A\to C)}{A\to B}\wedge E \quad [A]^1}{B}\to E \quad \dfrac{\dfrac{(A\to B)\wedge(A\to C)}{A\to C}\wedge E \quad [A]^1}{C}\to E\\ \vdots \\ C\end{array}}{B\wedge C}\wedge I}{A\to(B\wedge C)}\to I,1$$

すると 2 つの問題はそれぞれ、2 つの前提 B 及び C と結論 B をつなぐ問題と、2 つの前提 B 及び C と結論 C をつなぐ問題に還元されるが、不要な部分を削除して前提と結論をつなぎ合わせればこれは明らかで、以下の証明図が得られる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A\to B)\wedge(A\to C)}{A\to B}\wedge E \quad [A]^1}{B}\to E \qquad \dfrac{\dfrac{(A\to B)\wedge(A\to C)}{A\to C}\wedge E \quad [A]^1}{C}\to E}{B\wedge C}\wedge I}{A\to(B\wedge C)}\to I,1$$

1.8　さらに練習 $\to I$

練習問題 9 以下の推論が正しいことを示してください。

1. **前提 1** $A\wedge(A\to(B\to C))$
   結論 $B\to C$
2. **前提 1** $A\to B$
   結論 $(B\to C)\to(A\to C)$
3. **前提 1** $A\to B$
   前提 2 $A\wedge(B\to C)$
   結論 C
4. **前提 1** $A\to(C\wedge D)$
   結論 $(A\wedge B)\to D$
5. **前提 1** $A\wedge(B\to C)$
   結論 $(A\to B)\to C$
6. **結論** $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$
7. **前提 1** $A\to(B\to C)$
   結論 $B\to(A\to C)$
8. **前提 1** $A\to(B\to C)$
   結論 $(A\to B)\to(A\to C)$
9. **結論** $(B\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))$

1.9 数学の証明と自然演繹

自然演繹は、数学の証明をできる限り忠実に表現できるように設計されている。

例 10 正の整数 n について、n^2 が偶数ならば、n は偶数である。

Proof. 正の整数 n について、n^2 が偶数であるとする。($\to I$ **規則の暫定的仮定**)

ここで n が偶数でないと仮定すると(**背理法の仮定**)、n は奇数であり、したがってある正の整数 m について、$n = 2m + 1$ が成り立つ。すると、以下の等式が成り立つ。

$$n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$$

ここで、ある正の整数 x について、$x = 2y + 1$ となる正の整数 y があれば、x は奇数だから、上の等式から n^2 は奇数である。($\to E$ **規則**)

しかしこれは、n^2 が偶数であるという仮定に反する。よって n は偶数である。(**背理法**)

したがって、n^2 が偶数ならば、n も偶数である。($\to I$ **規則**) ■

数学の証明は通常、上のような文章で書かれるが、それを自然演繹の証明図で表現することにより、主張とその根拠の関係や、証明の構造を図形的に把握できる。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{仮定}\\ {[}n^2\text{ は偶数 }]\end{array}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{背理法の仮定}\\ {[}\neg(n\text{ は偶数})]\end{array}}{n\text{ は奇数}}}{\text{ある }m\text{ について、}n=2m+1}}{n^2=2(2m^2+2m)+1}\quad \dfrac{(x=2y+1)\to(x\text{ は奇数})}{(n^2=2(2m^2+2m)+1)\to(n^2\text{は奇数})}}{n^2\text{は奇数}}\to E}{\text{矛盾}}}{n\text{ は偶数}}\ \text{背理法}}{n^2\text{ が偶数}\to n\text{ は偶数}}\to I
$$

1.10 ¬ 除去規則

「夜神月は犯人ではない」という文と、「夜神月は犯人である」という文は、矛盾している。したがって、この二つの文を前提として矛盾を導くことができる。

矛盾を $\perp$ という記号を用いて表現し、上のことを図式化すると以下のようになる。

$$\dfrac{\neg P \quad P}{\perp}$$

この規則は一般に、¬ 除去規則と呼ばれ、

「$\neg X$ という論理式と X という論理式を導くことができるときには、矛盾 $\perp$ を導いてよい」

ことを表す推論規則として、以下のように定式化される。

¬ 除去規則（$\neg E$ と略記する） $\begin{array}{c}\vdots\\ \neg X\end{array}$ および $\begin{array}{c}\vdots\\ X\end{array}$ が成り立つとき、以下のようにして矛盾 $\perp$ を導いてよい。

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \neg X & X\end{array}}{\perp}\ \neg E$$

練習問題 11 以下の推論が正しいことを示してください。

(1)

前提 1 $A \to \neg B$

前提 2 $A \to B$

前提 3 A

結論 $\perp$

(2)

前提 1 $A \to B$

前提 2 $\neg B$

前提 3 A

結論 $\perp$

(3)

前提 1 $A \to (B \to \neg C)$

前提 2 $(A \wedge B) \wedge C$

結論 $\perp$

(4)

前提 1 $(C \wedge \neg(A \to B)) \wedge D$

前提 2 $(C \wedge D) \to (A \to B)$

結論 $\perp$

1.11 ¬ 導入規則

¬ 導入規則は、$\to$ 導入規則と類似の推論規則である。

例 12 **前提 1** 太郎は 100 点をとれば、単位をもらえる。

前提 2 太郎は単位をもらえなかった。

結論 故に太郎は 100 点をとれなかった。

- 「太郎は 100 点をとれなかった」ことを示すために、**敢えて「太郎は 100 点をとった」と仮定してみる。**
- すると前提 1 から「100 点をとれば単位をもらえる」ために、「太郎は 100 点をとった」という最初の仮定とあわせて、「太郎は単位をもらえた」という結論を導き出すことができる。（$\to E$ 規則）
- すると、前提 2 で「太郎は単位をもらえなかった」とあるために、「太郎は単位をもらえ、かつ太郎は単位をもらえなかった」という**矛盾した結論が導かれてしまう。**
- このような矛盾は最初に「太郎は 100 点をとれた」と仮定したことから導かれたものであり、したがって**その否定「太郎は 100 点を取れなかった」を結論することができる。**

上の推論のように、

1. まず暫定的な仮定を置き、
2. その仮定から矛盾を導き、
3. それによってその仮定が間違っていたこと、すなわちその仮定の否定を結論する

というような論法は、一般に**帰謬法**などと呼ばれ、日常的な推論においてもしばしば用いられる基本的な論法の一つである。

このような論法は $\neg$ 導入（$\neg I$）規則と呼ばれ、

「$\neg X$ を導くためには、X を暫定的な仮定として矛盾を導けばよい」
もしくは「X という暫定的な仮定から矛盾 $\perp$ が導けるときには、
$\neg X$ という論理式を導いてよい」

ことを表す推論規則として、以下のように定式化される。

$\neg$ 導入規則（$\neg I$ と略記する） $\begin{array}{c} X \\ \vdots \\ \perp \end{array}$（$X$ という仮定から矛盾が導ける）が成り立つとき、X という仮定を（いくつか）除去して、以下のようにして論理式 $\neg X$ を導いてよい。

$$\dfrac{\begin{array}{c} [X]^n \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg X}\ \neg I, n$$

ここで、カッコ [ ] で括って仮定 X を除去する操作により、**仮定 A は「閉じられる」**といい、証明のどの段階で仮定が閉じられたのかを明示するために、カッコ [ ] および対応する $\neg$ 導入規則には、自然数の添え字 n を付ける。なお、閉じられていない仮定は「開いた仮定」と呼ばれる。

ここでも、仮定を閉じる際にいくつかの仮定を同時に閉じてよいことに注意。

またたとえば**上の A が $\neg B$ という形のとき、$\neg I$ 規則によって得られる結論は** $\neg\neg B$ という論理式であることに注意。（$\neg B$ から B という結論を得る推論規則は、後で導入する背理法（RAA 規則）と呼ばれる規則であり、$\neg I$ 規則とは別の規則である。）

練習問題 13 以下の推論が正しいことを示してください。

1. **前提 1** $A \to B$
   前提 2 $\neg B$
   結論 $\neg A$

2. **前提 1** A
   結論 $\neg\neg A$

3. **前提 1** $\neg(A \wedge B)$
   結論 $A \to \neg B$

4. **結論** $(\neg B \wedge (A \to B)) \to \neg A$

5. **結論** $A \to \neg\neg A$

6. **前提 1** $A \to (B \wedge \neg B)$
   結論 $\neg A$

7. **前提 1** $A \to B$
   結論 $\neg B \to \neg A$

8. **前提 1** $\neg A \wedge \neg B$
   結論 $\neg(\neg A \to B)$

9. **前提 1** $A \wedge \neg B$
   結論 $\neg(A \to B)$

1.12 推論規則のまとめ（$\wedge, \to, \neg$）

$\wedge$ 導入規則（$\wedge I$） 「X という論理式と Y という論理式が導けるときには、$X \wedge Y$ という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ X & Y\end{array}}{X \wedge Y}\ \wedge I$$

$\wedge$ 除去規則（$\wedge E$） 「$X \wedge Y$ という論理式が導けるとき、X という論理式を導いてよい」「$X \wedge Y$ という論理式が導けるとき、Y という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ X \wedge Y\end{array}}{X}\ \wedge E1 \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ X \wedge Y\end{array}}{Y}\ \wedge E2$$

$\to$ 導入規則（$\to I$） 「$X \to Y$ という論理式を導くためには、暫定的な仮定として X を前提に加えて、Y を導けばよい」

$$\dfrac{\begin{array}{c}[X]^n \\ \vdots \\ Y\end{array}}{X \to Y}\ \to I, n$$

$\to$ 除去規則（$\to E$） 「$X \to Y$ という論理式と X という論理式を導くことができるときには、Y という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ X \to Y & X\end{array}}{Y}\ \to E$$

$\neg$ 導入規則（$\neg I$） 「$\neg X$ という論理式を導くためには、X を暫定的な仮定として前提に加えて、矛盾 $\perp$ を導けばよい」

$$\dfrac{\begin{array}{c}[X]^n \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\neg X}\ \neg I, n$$

$\neg E$ 除去規則（$\neg E$） 「$\neg X$ という論理式と X という論理式を導くことができるときには、矛盾 $\perp$ を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ \neg X & X\end{array}}{\perp}\ \neg E$$

定義 14 (証明可能性（provability）)

- 上記の推論規則を繰り返し適用することにより得られる木の形をした図式を**証明図（proof figure）**と呼ぶ。
- 証明図の一番下の論理式をその証明図の**結論（conclusion）**という。
- 開いた前提（仮定）$B_1, \ldots, B_n$ から結論 A への証明図が存在するとき、**（前提）$B_1, \ldots, B_n$ から（結論）A が証明可能である（provable）**と言い、以下のように表す。

  $$B_1, \ldots, B_n \vdash A$$

  特に、開いた前提が一つもないときには単に A **は証明可能である**と言い、以下のように表す。

  $$\vdash A$$

1.13 ちょっと復習：機械的証明構成

練習問題 15 証明図を構成して、以下を示してください。

1. $A \wedge (B \to C)\ ,\ A \wedge (B \to D) \vdash (A \to B) \to (C \wedge D)$
2. $(A \to B) \wedge (B \to C) \vdash A \to C$
3. $A \to (B \wedge C) \vdash (A \to B) \wedge (A \to C)$
4. $\vdash A \to ((A \to (B \wedge C)) \to C)$

1.14 さらに練習

練習問題 16 証明図を構成して、以下を示してください。

1. $A \wedge (A \to (B \to C)) \vdash \neg C \to \neg B$
2. $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$
3. $(A \wedge B) \to C \vdash A \to (\neg C \to \neg B)$
4. $A \to (B \to C) \vdash \neg C \to \neg(A \wedge B)$
5. $\vdash A \to A$
6. $\vdash \neg A \to \neg\neg\neg A$
7. $\vdash (A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$
8. $\vdash (A \to B) \to (A \to \neg\neg B)$
9. $\vdash (A \to B) \to \neg(A \wedge \neg B)$
10. **（やや難）** $\vdash \neg\neg\neg A \to \neg A$
11. **（難）** $\vdash (A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$

1.15　∨ 導入規則

以下の推論は、容易に妥当だと確かめられ、また誰もが納得するもっとも基本的な推論であると考えられる。

前提 1 夜神月は犯人である。

結論 夜神月か弥海砂が犯人である。

左の推論は以下のように表現される。

$$\frac{P}{P \vee Q}$$

同様に、

前提 1 弥海砂は犯人である。

結論 夜神月か弥海砂が犯人である。

左の推論は以下のように表現される。

$$\frac{Q}{P \vee Q}$$

これらの推論は一般に、∨ 導入規則と呼ばれ、

「X という論理式が導けるときには、$X \vee Y$ という論理式を導いてよい」
「Y という論理式が導けるときには、$X \vee Y$ という論理式を導いてよい」

ことを表す推論規則として、以下のように定式化される。

∨ 導入規則（$\vee I$ と略記する） $\begin{array}{c}\vdots\\ X\end{array}$ が成り立つとき、以下のようにして論理式 $X \vee Y$ を導いてよい。

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ X\end{array}}{X \vee Y}\ \vee I1$$

また、$\begin{array}{c}\vdots\\ Y\end{array}$ が成り立つとき、以下のようにして論理式 $X \vee Y$ を導いてよい。

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ Y\end{array}}{X \vee Y}\ \vee I2$$

練習問題 17 以下を示してください。

1. $\vdash A \to (A \vee B)$
2. $\vdash B \to (A \vee B)$
3. $(A \vee \neg B) \to C \vdash A \to C$
4. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$
5. $\neg(\neg A \vee B) \vdash \neg\neg A \wedge \neg B$
6. $\neg(A \vee \neg B) \vdash \neg A \wedge \neg\neg B$

1.16　∨ 除去規則

∨ 除去規則は → 導入規則と似た特徴を持っている。まず以下の推論を考えてみる。

前提 1　サザエかカツオが犯人だ。

前提 2　サザエが犯人なら、カツオも犯人だ。

結論　カツオは犯人だ。

上の推論は以下のようにして妥当であることが示される。

1. 前提 1 で、サザエかカツオのどちらかが犯人であることが分かっているので、例えば、カツオが犯人であるとしてみれば、これはそのまま結論である。
2. では、サザエが犯人であるとしてみる。すると、前提 2 から、サザエが犯人ならカツオも犯人である、ことが分かっているので、→ 除去規則を用いて、カツオも犯人であることが分かる。
3. 従って、サザエが犯人であるとしても、カツオが犯人であるとしてもどちらにしても、カツオが犯人であることが結論される。

これを図式化すると以下のようになる。

$$\dfrac{\text{サザエ} \vee \text{カツオ} \qquad [\text{カツオ}]^1 \qquad \dfrac{\text{サザエ} \to \text{カツオ} \quad [\text{サザエ}]^1}{\text{カツオ}} \to E}{\text{カツオ}}\ 1$$

この最後のステップが ∨ 除去規則であり、一般には場合分け論法などと呼ばれる。「カツオが犯人である」という結論を導くときに、「カツオが犯人である」という仮定と「サザエが犯人である」という仮定が、→ 導入規則と同様に暫定的仮定であることに注意。

この論法では、

1. まず「サザエかカツオが犯人である」という前提を基に、
   (a) サザエが犯人であると仮定した場合と、
   (b) カツオが犯人であると仮定した場合とで

   場合わけがなされる。
2. その上で、それぞれの場合で「カツオが犯人である」という同一の結論を導くことにより、
3. 場合わけによらず **（すなわち「カツオが犯人である」という仮定と「サザエが犯人である」という仮定なしで）**「カツオが犯人である」ことを結論している。

この推論は一般に、

「$X \vee Y$ という論理式が導け、また X という暫定的仮定からも、Y という暫定的仮定からも同じ論理式 Z が導けるときには、論理式 Z を導いてよい」

ことを表す推論規則として、以下のように定式化される。

$\vee$ 除去規則（$\vee E$ と略記する） $\begin{array}{c}\vdots\\ X \vee Y\end{array}$ と $\begin{array}{c}X\\ \vdots\\ Z\end{array}$ および $\begin{array}{c}Y\\ \vdots\\ Z\end{array}$ が成り立つときには、以下のようにして論理式 Z を導いてよい。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ X \vee Y\end{array} \qquad \begin{array}{c}[X]^n\\ \vdots\\ Z\end{array} \qquad \begin{array}{c}[Y]^n\\ \vdots\\ Z\end{array}}{Z}\ \vee E, n$$

例 18 $\neg\neg A \wedge B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$

1. いつも通りに前提を上に、結論を下に書いて、下（結論）から $\wedge, \to, \neg$ を探してさかのぼる。

$$\begin{array}{c}\neg\neg A \wedge B\\ \vdots\\ \neg(\neg A \vee \neg B)\end{array} \qquad \triangleright \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg A \vee \neg B]^1 \quad \neg\neg A \wedge B\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg(\neg A \vee \neg B)}\ 1$$

2. **パズルの上側に $\vee$ が出てきたら、すぐに場合分けをする。**

   2-1. $[\neg A \vee \neg B]^1$ のすぐ下に横線を引いて、パズルの下側（結論）につなげる。

$$\dfrac{\dfrac{[\neg A \vee \neg B]^1 \qquad \vdots}{\bot}}{\neg(\neg A \vee \neg B)}\ 1$$

   2-2. 結論（パズルの下の端）と前提を 2 つコピーして、パズルを 3 つの部分に分解する。（実際に解くべきパズルは 2 つ。）

$$\dfrac{\dfrac{[\neg A \vee \neg B]^1 \quad \left|\ \begin{array}{c}\neg\neg A \wedge B\\ \vdots\\ \bot\end{array}\ \right| \quad \begin{array}{c}\neg\neg A \wedge B\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\bot}}{\neg(\neg A \vee \neg B)}\ 1$$

   2-3. 2 つのパズルにそれぞれ、$[\neg A]^2$、$[\neg B]^2$ を暫定的仮定として加えて、横線に番号を付ける。

$$\dfrac{\dfrac{[\neg A \vee \neg B]^1 \quad \left|\ \begin{array}{c}\neg\neg A \wedge B \quad [\neg A]^2\\ \vdots\\ \bot\end{array}\ \right| \quad \begin{array}{c}\neg\neg A \wedge B \quad [\neg B]^2\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\bot}\ 2}{\neg(\neg A \vee \neg B)}\ 1$$

3. あとはいつも通り $\vdots$ を埋める。

$$\dfrac{\dfrac{[\neg A \vee \neg B]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg A \wedge B}{\neg\neg A}\wedge E \quad [\neg A]^2}{\bot}\ \neg E \qquad \dfrac{[\neg B]^2 \quad \dfrac{\neg\neg A \wedge B}{B}\wedge E}{\bot}\ \neg E}{\bot}\ \vee E, 2}{\neg(\neg A \vee \neg B)}\ \neg I, 1$$

上の例のように、パズルの上の方に $A \vee B$ の形の論理式が出てきたら、すぐに $\vee$ 除去規則を適用して場合分けの証明を開始する。

練習問題 19 以下を示してください。

1. $A \to C$, $B \to C \vdash (A \vee B) \to C$
2. $A \vee B \vdash B \vee A$
3. $\vdash A \to (A \wedge (A \vee B))$
4. $A \vee (A \wedge B) \vdash A$
5. $\vdash A \to (A \vee (A \wedge B))$
6. $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
7. $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
8. $(A \vee B) \to C \vdash (A \to C) \wedge (B \to C)$
9. $\vdash (A \vee A) \to A$
10. $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
11. **(やや難)** $(A \wedge B) \vee C \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
12. **(やや難)** $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge C$
13. **(難)** $(A \vee B) \vee C \vdash B \vee (C \vee A)$
14. **(難)** $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$

1.17 $\perp$ 除去規則

以下の推論について考えてみる。

前提 1 カツオは鉢植えを壊した。

前提 2 カツオは鉢植えを壊していない。

結論 ナミヘイさんは禿げている。

すぐにわかるように、「カツオは鉢植えを壊した」と「カツオは鉢植えを壊していない」という 2 つの前提は矛盾している。また、結論はカツオや鉢植えにまったく関係のない文となっている。

このような矛盾した状況というのは、現実にはありえない状況であり、そのような状況下ではどんな主張でも成り立つと考える。すなわち、**矛盾とはそこからどんな主張も導けるもの**であり、これが論理学的な矛盾の特徴づけなのである。

上のような推論は一般に、

「矛盾 $\perp$ という論理式が導けるときには、どんな論理式 X でも導いてよい」

ことを表す推論規則として、以下のように定式化される。

$\perp$ 除去規則（$\perp E$ と略記する） $\begin{array}{c}\vdots \\ \perp\end{array}$ が成り立つときには、以下のようにして任意の論理式 X を導いてよい。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \perp\end{array}}{X}\ \perp E$$

練習問題 20 以下を証明してください。

1. $\vdash \perp \to A$
2. $A \wedge \neg A \vdash B$
3. $\vdash \neg A \to (A \to B)$
4. **(やや難)** $\neg A \vee B \vdash A \to B$
5. **(やや難)** $\neg A \wedge (A \vee B) \vdash B$

1.18　$\neg\neg$ 除去規則と背理法

通常のインフォーマルな推論においては、A と $\neg\neg A$ は同一視される。$A \vdash \neg\neg A$ は、以前の練習問題でみたように、これまでの推論規則を用いて証明することができる。しかし、この逆である $\neg\neg A \vdash A$ を導くためには、以下の二重否定除去規則が必要となる。

A と $\neg\neg A$ を同一視するための二重否定除去規則は一般に、

「$\neg\neg X$ という論理式が導けるときには、論理式 X を導いてよい」

ことを表す推論規則として、以下のように定式化される。

$\neg\neg$ 除去規則（$\neg\neg E$ と略記する）　$\begin{array}{c}\vdots\\ \neg\neg X\end{array}$　が成り立つときには、以下のようにして論理式 X を導いてよい。

$$\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg\neg X\end{array}}{X}\ \neg\neg E$$

二重否定除去規則と同様に、われわれが日常的によく用いる論法に、「背理法」がある。背理法は例えば以下のような推論で用いられる。

前提 1　カツオが鉢植えを壊していないならば、カツオは野球ボールを持っていない。

前提 2　カツオは野球ボールを持っている。

結論　カツオが鉢植えを壊した。

1. ここで、結論である「カツオが鉢植えを壊した」を導くために、**そうでないと暫定的に仮定してみる**。すなわち、「カツオは鉢植えを壊していない」と仮定してみる。
2. すると、前提 1 から $\to$ 除去規則により、「カツオは野球ボールを持っていない」ことが帰結する。
3. しかし、それは前提 2 の「カツオは野球ボールを持っている」と矛盾する。
4. すなわち、**「カツオは鉢植えを壊していない」と仮定すると、矛盾に陥る。**

   したがってその仮定が間違っていたのであり、「カツオは鉢植えを壊した」と結論することができる。（この最後のステップが背理法。）

この推論は一般に、**「$\neg X$ という暫定的仮定から矛盾 $\perp$ が導けるときには、論理式 X を導いてよい」** ことを表す推論規則として、以下のように定式化される。

背理法（RAA と略記する）　$\begin{array}{c}\neg X\\ \vdots\\ \perp\end{array}$　が成り立つときには、以下のようにして論理式 X を導いてよい。

$$\cfrac{\begin{array}{c}[\neg X]^n\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{X}\ RAA, n$$

Remark 21 背理法 RAA は、これまでにみた否定の導入規則 $\neg I$ とよく似ているが、両者は異なる規則である。

$$\begin{array}{c}[\neg X]^n\\ \vdots\\ \dfrac{\bot}{X}\ RAA, n\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c}[X]^n\\ \vdots\\ \dfrac{\bot}{\neg X}\ \neg I, n\end{array}\qquad \begin{array}{c}[\neg X]^n\\ \vdots\\ \dfrac{\bot}{\neg\neg X}\ \neg I, n\end{array}$$

背理法では、暫定的仮定の否定 $\neg$ が結論ではなくなっているのに対して、否定の導入規則は否定を 1 つ結論に付け足すだけである。たいした違いではないように見えるかもしれないが、理論的・哲学的にはこの差は非常に大きい。

Remark 22 二重否定除去規則と背理法は、推論規則として同等である。

- 二重否定除去規則を用いれば、($\neg I$ 規則と組み合わせて)以下のようにして背理法をシミュレートすることができる。

$$\begin{array}{c}[\neg A]^1\\ \vdots\\ \dfrac{\dfrac{\bot}{\neg\neg A}\ \neg I, 1}{A}\ \neg\neg E\end{array}$$

- また逆に、背理法を用いれば、($\bot E$ 規則と組み合わせて)以下のようにして二重否定除去規則をシミュレートすることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg\neg A\end{array}\quad [\neg A]^1}{\bot}\ \bot E}{A}\ RAA, 1$$

- したがって、二重否定除去規則はいつでも背理法に置き換えることができ、また逆に背理法はいつでも二重否定除去規則に置き換えることができる。

練習問題 23 以下を証明してください。

1. $\vdash \neg\neg A \to A$
2. $\neg A \to (A \wedge \neg B) \vdash A$
3. $\neg A \to \neg B \vdash B \to A$
4. $\neg A \to B \vdash \neg B \to A$
5. **(難)** $A \to B \vdash \neg A \vee B$
6. **(難)** $\vdash A \vee \neg A$
7. **(難)** $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$

1.19　まとめ

レベル 1

1. $(A \to B) \land (B \to C) \vdash A \to C$ （三段論法）
2. $(A \to B) \land (A \to C) \vdash A \to (B \land C)$ （連言）
3. $\vdash (A \land (A \to B)) \to B$ （Modus ponens）
4. $(A \land B) \to C \vdash A \to (B \to C)$ （随伴性）
5. $A \to (B \to C) \vdash (A \land B) \to C$ （随伴性）
6. $\vdash A \to \neg\neg A$ （二重否定）
7. $\vdash \neg\neg A \to A$ （二重否定）
8. $\vdash (B \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$ （交換律）
9. $\vdash \neg(A \land \neg A)$ （矛盾律）

レベル 2

10. $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ （対偶）
11. $\neg B \to \neg A \vdash A \to B$ （対偶）
12. $A \lor B, \neg A \vdash B$ （選言的三段論法）
13. $\vdash \neg(A \lor B) \to (\neg A \land \neg B)$ （ド・モルガン）
14. $\vdash (\neg A \lor \neg B) \to \neg(A \land B)$ （ド・モルガン）
15. $\vdash (\neg A \land \neg B) \to \neg(A \lor B)$ （ド・モルガン）

レベル 3（難）

16. $\vdash \neg(A \land B) \to (\neg A \lor \neg B)$ （ド・モルガン）
17. $\vdash A \lor \neg A$ （排中律）
18. $\neg A \lor B \vdash A \to B$ （含意と選言）
19. $A \to B \vdash \neg A \lor B$ （含意と選言）
20. $(A \land B) \lor C \vdash (A \lor C) \land (B \lor C)$ （分配律）
21. $(A \lor C) \land (B \lor C) \vdash (A \land B) \lor C$ （分配律）
22. $(A \lor B) \land C \vdash (A \land C) \lor (B \land C)$ （分配律）
23. $(A \land C) \lor (B \land C) \vdash (A \lor B) \land C$ （分配律）

1.20 推論規則のまとめ

$\wedge$ 導入規則（$\wedge I$） 「X という論理式と Y という論理式が導けるときには、$X \wedge Y$ という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ X & Y\end{matrix}}{X \wedge Y}\ \wedge I$$

$\wedge$ 除去規則（$\wedge E$） 「$X \wedge Y$ という論理式が導けるとき、X という論理式を導いてよい」「$X \wedge Y$ という論理式が導けるとき、Y という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ X \wedge Y\end{matrix}}{X}\ \wedge E1 \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ X \wedge Y\end{matrix}}{Y}\ \wedge E2$$

$\to$ 導入規則（$\to I$） 「X という暫定的仮定から Y という論理式が導けるときには、$X \to Y$ という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}[X]^n \\ \vdots \\ Y\end{matrix}}{X \to Y}\ \to I, n$$

$\to$ 除去規則（$\to E$） 「$X \to Y$ という論理式と X という論理式を導くことができるときには、Y という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ X \to Y & X\end{matrix}}{Y}\ \to E$$

$\neg$ 導入規則（$\neg I$） 「X という暫定的仮定から矛盾 $\perp$ が導けるときには、$\neg X$ という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}[X]^n \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\neg X}\ \neg I, n$$

$\neg$ 除去規則（$\neg E$） 「$\neg X$ という論理式と X という論理式を導くことができるときには、矛盾 $\perp$ を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ \neg X & X\end{matrix}}{\perp}\ \neg E$$

$\lor$ 導入規則（$\lor I$） 「X という論理式が導けるときには、$X \lor Y$ という論理式を導いてよい」「Y という論理式が導けるときには、$X \lor Y$ という論理式を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ X\end{matrix}}{X \lor Y}\ \lor I1 \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ Y\end{matrix}}{X \lor Y}\ \lor I2$$

$\lor$ 除去規則（$\lor E$） 「$X \lor Y$ という論理式が導け、また X という暫定的仮定からも、Y という暫定的仮定からも同じ論理式 Z が導けるときには、論理式 Z を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix} \\ \vdots \\ X \lor Y\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[X]^n \\ \vdots \\ Z\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[Y]^n \\ \vdots \\ Z\end{matrix}}{Z}\ \lor E, n$$

$\bot$ 除去規則（$\bot E$） 「矛盾 $\bot$ が導けるときには、任意の論理式 X を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \bot\end{matrix}}{X}\ \bot E$$

$\neg\neg$ 除去規則（$\neg\neg E$） 「$\neg\neg X$ という論理式が導けるときには、論理式 X を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \neg\neg X\end{matrix}}{X}\ \neg\neg E$$

背理法（RAA） 「$\neg X$ という暫定的仮定から矛盾 $\bot$ が導けるときには、論理式 X を導いてよい」

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg X]^n \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{X}\ RAA, n$$

（背理法は二重否定除去規則と同等である。）