# 1 Gentzen の式計算

## 1.1 直観主義論理の式計算 LJ

### 1.1.1 LJ

まずは、直観主義論理の式計算体系 LJ を導入する。式計算では、自然演繹で「前提 $A_1, \ldots, A_n$ から結論 $C$ への証明が存在する」を表すメタレベルの表現

$$A_1, \ldots, A_n \vdash C$$

を対象レベルの表現として用いる。

ただしこれは自然演繹でのそれとは異なり、式計算においては純粋に形式的な表現に過ぎない**対象レベルの表現**であり、実際に $A_1, \ldots, A_n$ から $C$ が帰結するかどうかは、それが与えられた推論規則を用いて導出可能であるかどうかによって定まる。（自然演繹での $A_1, \ldots, A_n \vdash C$ は、「前提 $A_1, \ldots, A_n$ から $C$ への証明が実際に存在する」ときにのみ用いる**メタレベルの表現**である。）

先に見たように、ここでは $\perp$ という命題定項は用いない。従って論理式は以下のものである。

$$A, B \quad ::= \quad P \;\Big|\; A \wedge B \;\Big|\; A \vee B \;\Big|\; A \to B \;\Big|\; \neg A$$

**定義 1** 直観主義論理の式計算体系 LJ の式（*sequent*）とは、

$$A_1, \ldots, A_n \vdash C$$

の形の表現のことである。ここで $n \leq 0$、各 $A_i$ 及び $C$ は論理式である。特別な場合として、次のものもそれぞれ式である。

- $A_1, \ldots, A_n \vdash$ （直感的意味は「$A_1, \ldots, A_n$ を仮定すると矛盾する」）
- $\vdash C$ （$n = 0$ の場合。直感的意味は「前提なしに $C$ が証明可能」）
- $\vdash$ （空式（*empty sequent*）と呼ばれる。直感的意味は「矛盾する」）

論理式の有限列 $A_1, \ldots, A_n$ を $\Gamma, \Delta, \Pi$ 等のギリシア大文字を用いて表すことにする。すると任意の式は $\Gamma \vdash C$ と表現できる。（注意：空列、つまり 0 個の論理式から成る列も $\Gamma, \Delta$ 等で表現される。また、$C$ が空の時もこのように表すことにする。）

式計算では、次の 3 種類の公理及び推論規則を組み合わせることにより正しい推論の型を導出することができる。

始式（公理）及びカット規則
構造規則
論理規則

**始式（Initial sequent）及びカット規則**

$$A \vdash A \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Delta \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}\, cut$$

**構造規則（Structural rules）**

$$\frac{\Gamma \vdash C}{A, \Gamma \vdash C}\, weakL \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\, weakR$$

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash C}{A, \Gamma \vdash C}\, contrL$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}\, exL$$

構造規則（structural rules）の $weak, contr, ex$ はそれぞれ *weakening, contraction, exchange* の略である。

**論理規則**

$$\frac{A, \Gamma \vdash C}{A \wedge B, \Gamma \vdash C}\, \wedge L1 \quad \frac{B, \Gamma \vdash C}{A \wedge B, \Gamma \vdash C}\, \wedge L2 \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\, \wedge R$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash C \quad B, \Gamma \vdash C}{A \vee B, \Gamma \vdash C}\, \vee L \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\, \vee R1 \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\, \vee R2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Delta \vdash C}{A \to B, \Gamma, \Delta \vdash C} \to L \qquad\qquad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to R$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\neg A, \Gamma \vdash}\, \neg L \qquad\qquad \frac{A, \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}\, \neg R$$

以降、$\vee R1$ 規則と $\vee R2$ 規則を区別せずに単に $\vee R$ 規則ということもある。同様に、$\wedge L1$ 規則と $\wedge L2$ 規則を区別せずに単に $\wedge L$ 規則ということもある。

**定義 2 (証明図)** $\Gamma \vdash C$ を任意の式とするとき、（LJ における）$\Gamma \vdash C$ の**証明図**（*proof figure*）は以下のように帰納的に定義される。

1. 始式 $A \vdash A$ は、$A \vdash A$ の証明図である。
2. $\pi_1$ が $\Gamma_1 \vdash C_1$ の証明図であり、

$$\frac{\Gamma_1 \vdash C_1}{\Gamma \vdash C}$$

が LJ の推論規則ならば、$\pi_1$ にこの推論規則を付け加えてできる図形

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots\, \pi_1 \\ \Gamma_1 \vdash C_1 \end{array}}{\Gamma \vdash C}$$

は $\Gamma \vdash C$ の証明図である。

3. $\pi_1$ が $\Gamma_1 \vdash C_1$ の証明図であり、$\pi_2$ が $\Gamma_2 \vdash C_2$ の証明図であり、

$$\frac{\Gamma_1 \vdash C_1 \quad \Gamma_2 \vdash C_2}{\Gamma \vdash C}$$

が LJ の推論規則ならば、$\pi_1$ と $\pi_2$ にこの推論規則を付け加えてできる図形

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1 \\ \Gamma_1 \vdash C_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2 \\ \Gamma_2 \vdash C_2\end{array}}{\Gamma \vdash C}$$

は $\Gamma \vdash C$ の証明図である。

**定義 3 (証明可能性)** （LJ において）式 $\Gamma \vdash C$ の証明図が存在するとき、式 $\Gamma \vdash C$ は（LJ において）**証明可能**（*provable*）であるという。一つの結論 $A$ のみから成る式 $\vdash A$ が証明可能であるとき、論理式 $A$ は**証明可能**であるという。

### 1.1.2 派生規則

これまでに記述した推論体系 LJ は、カット規則を除外して考えると、必要最小限の規則群から成っている。しかし、あくまでも最小限の規則しか含まれていないので、具体的な論理的推論について LJ の証明図を書き下そうとすると、かなり骨が折れる作業となる。例えば我々は $A, B, C \vdash D$ から $A, B, C \wedge E \vdash D$ を導出することができるが、その過程を証明図で書くと次のようになる：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A, B, C \vdash D}{A, C, B \vdash D}\ exL}{C, A, B \vdash D}\ exL}{C \wedge E, A, B \vdash D}\ \wedge L1}{A, C \wedge E, B \vdash D}\ exL}{A, B, C \wedge E \vdash D}\ exL$$

このような論理式の入れ替えの作業を、何かを証明する都度行うのでは効率が悪い。故にここでいくつかの取り決めをしておくことにする。

1. Exchange：式において、論理式の現れる順序は無視することにする。例えば、2 つの式 $A, B, C \vdash D$ と $C, A, B \vdash D$ は同じものと見なす。これは Exchange 規則を必要な回数用いれば、一方から他方が導出できることは明らかであり、両者を区別する必要がないからである。
2. （上と関係して）LK の公式的な推論規則では、論理推論規則は式の右端か左端の論理式にしか適用できないことになっているが、今後は論理推論規則は式の中のどの論理式に対しても適用できることにする。例えば、上の推論の代わりに今後は

$$\frac{A, B, C \vdash D}{A, B, C \wedge E \vdash D}\ \wedge L1$$

というように 1 ステップで上式から下式を導入してよいことにする。

3. 今後、必要に応じて**派生規則**（derived rules）を導入していく。派生規則とは、LK の公式の推論規則ではないが、推論規則（及び始式）を組み合わせることにより、容易に導出することができるような推論規則のことである。派生規則は

$$\frac{\Gamma_1 \vdash C_1 \quad \cdots \quad \Gamma_n \vdash C_n}{\Gamma \vdash C}$$

のように二重線を用いて表すこともある。（省略することもある。）例えば、以下のものが派生規則である。

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash D}{A \land B, \Gamma \vdash D} \land L' \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Gamma \vdash D}{A \to B, \Gamma \vdash D} \to L'$$

実際 $\to L'$ は以下のようにして導出することができる：

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \quad B, \Gamma \vdash D}{\Gamma, A \to B, \Gamma \vdash D} \to L}{A \to B, \Gamma \vdash D} \; contrL$$

上の $contrL$ のように、同じ規則を何度か重ねたものも派生規則と見なして二重線で表すことにする。

どんな派生規則も LJ の推論を数ステップ組み合わせて得られるものであるから、派生規則を用いた証明図は、（充分な忍耐力があれば）LJ の公式の証明図にいつでも書き直すことができる。

**練習問題 1** $\land L'$ を LJ で導出することができることを示してください。

### 1.1.3 推論規則の反転可能性

次に、推論規則の反転可能性について考える。例えば $\neg R$ 規則を用いれば、$A, \Gamma \vdash$ から $\Gamma \vdash \neg A$ が導出できることを知っているが、その逆は成り立つだろうか？つまり、$\Gamma \vdash \neg A$ から $A, \Gamma \vdash$ が導出できるだろうか？答えは yes である。次のようにすればよい。

$$\dfrac{\Gamma \vdash \neg A \quad \dfrac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash} \neg L}{A, \Gamma \vdash} \; cut$$

（ここで $cut$ 規則を用いていることに注意。）このように、いくつかの推論規則は逆方向に適用することができる。

一般に推論規則または派生規則

$$\frac{\Gamma_1 \vdash C_1 \quad \ldots \quad \Gamma_n \vdash C_n}{\Gamma \vdash C}$$

が**反転可能**（invertible）であるというのは、各 $1 \leq i \leq n$ について

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma_i \vdash C_i}$$

が LJ の派生規則となっていることである。

**定理 1 (反転可能性)** $\neg R, \wedge R, \to R, \wedge L', \vee L$ の各規則は反転可能である。

**練習問題 2 (反転可能性)** 上の定理 *1* を証明してください。

ちなみに、$\vee R, \neg L, \to L'$ は LJ では反転可能でない。また、もともとの $\wedge L, \to L$ の各規則も反転可能ではない。例えば、もしも $\wedge L$ 規則が反転可能であるとしたら、$A \wedge B, \Gamma \vdash D$ から $A, \Gamma \vdash D$ が常に導出できることになる。すると次のような証明図が作れてしまう：

$$\frac{A \wedge B \vdash A \wedge B}{\overline{A \vdash A \wedge B}}$$

よって $A \vdash A \wedge B$ が証明可能となるが、これは明らかにおかしいであろう。

反転可能性は式計算で具体的な論理式を証明する際に有用である。なぜならば、この性質は、証明探索の効率的な方略（strategy）を示唆するからである。

### 1.1.4 式計算の練習

**練習問題 3 (LJ)** 以下の式を LJ で証明してください。
（できれば自然演繹 NJ でも証明してください。対応が見えるかも。）

1. $\vdash A \wedge (A \to B) \to B$
2. $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$
3. $(A \wedge B) \vee C \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
4. $A \vee C, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C$
5. $A \vee B, C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
6. $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge C$
7. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$
8. $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

9. $A \to \neg A \vdash \neg A$
10. $\neg A \vee B \vdash A \to B$
11. $A \to \neg A, \neg A \to A \vdash$

## 1.2　古典論理の式計算：LK

### 1.2.1　LK

**定義** 4 LK の式（*sequent*）とは、

$$A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$$

の形の表現のことである。ここで $n \geq 0, m \geq 0$、各 $A_i, B_j$ は論理式である。特別な場合として、次のものもそれぞれ式である。

- $A_1, \dots, A_n \vdash$　　（$m = 0$ の場合）
- $\vdash B_1, \dots, B_m$　　（$n = 0$ の場合。）
- $\vdash$　　（$m = n = 0$ の場合。空式（*empty sequent*）と呼ばれる。）

LK の式は、基本的には自然演繹の $A_1, \dots, A_n \vdash B$ （前提 $A_1, \dots, A_n$ から結論 $B$ への証明が存在する）を意味する形式的な表現であるが、それを一般化した

$$A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$$

は「前提 $A_1, \dots, A_n$ から $B_1, \dots, B_m$ のどれかが帰結する」ことを表す。即ち意味的には

$$A_1, \dots, A_n \vdash B_1 \vee \cdots \vee B_m$$

と同じと思ってよい。結論のない

$$A_1, \dots, A_n \vdash$$

の形の式は、「前提 $A_1, \dots, A_n$ を仮定すると矛盾する」ことを表す。また、前提も結論もない空式

$$\vdash$$

は単に矛盾を表す。

論理式の有限列 $A_1, \dots, A_n$ を $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ 等のギリシア大文字を用いて表すことにする。すると任意の式は $\Gamma \vdash \Delta$ と表現できる。（注意：空列、つまり 0 個の論理式から成る列も $\Gamma, \Delta$ 等で表現される。）

**始式（Initial sequent）及びカット規則**

$$A \vdash A \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Pi \vdash \Lambda}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda}\ cut$$

**構造規則（Structural rules）**

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ weakL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ weakR$$

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ contrL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ contrR$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Pi \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \vdash \Delta}\ exL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Lambda}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Lambda}\ exR$$

**論理規則**

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\ \wedge L1 \qquad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\ \wedge L2 \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \wedge R$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}\ \vee L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee R1 \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee R2$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Pi \vdash \Lambda}{A \to B, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda}\ \to L \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B}\ \to R$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}\ \neg L \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ \neg R$$

以降、$\vee R1$ 規則と $\vee R2$ 規則を区別せずに単に $\vee R$ 規則ということもある。同様に、$\wedge L1$ 規則と $\wedge L2$ 規則を区別せずに単に $\wedge L$ 規則ということもある。

**定義 5 (証明可能性)** （LK において）式 $S$ の証明図が存在するとき、式 $S$ は（LK において）**証明可能**（*provable*）であるという。*1* つの結論 $A$ のみから成る式$\vdash A$ が証明可能であるとき、論理式 $A$ は**証明可能**であるという。

## 1.3　派生規則

例えば、以下のものが派生規則である。

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee R' \qquad \frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{\overline{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}}\ \wedge L' \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{\overline{A \to B, \Gamma \vdash \Delta}}\ \to L'$$

**練習問題 4** $\vee R', \wedge L', \to L'$ が LK で導出できることを示してください。

### 1.3.1 推論規則の反転

**定理 2 (反転可能性)** LK において、$\neg R, \wedge R, \to R, \vee R'$ 及び $\neg L, \wedge L', \to L', \vee L$ 規則は反転可能である。

**練習問題 5 (反転可能性)** 上の定理 *2* を証明してください。

### 1.3.2 式計算の練習

**練習問題 6** (LK) 以下の式を LK で証明してください。
（できれば自然演繹 NK でも証明してください。自然演繹がいかに難しいかが分かるはず。）

1. $\neg\neg A \vdash A$
2. $\vdash A \vee \neg A$ (Excluded middle)
3. $\neg A \to (A \wedge \neg B) \vdash A$
4. $A \to \neg A, \neg A \to A \vdash$
5. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
6. $A \to B \vdash \neg A \vee B$
7. $\vdash \neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B$ (De Morgan)
8. $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge B$
9. $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vdash A \vee B$
10. $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$
11. $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$ (Peirce's law)

### 1.3.3 式計算の性質

**補題 1** 非原始論理式 $A$ についての始式 $A \vdash A$ は、原子論理式についての始式 $P \vdash P$ のみから導出することができる。

*Proof.* 論理式 $A$ の構成に関する帰納法による。（照井さんのプリント参照。）

**命題 1** 式 $\Gamma \vdash \Delta$ が証明可能ならば、$\Gamma \vdash \Delta$ は始式を原始論理式に関するものに制限しても証明可能である。

*Proof.* $\Gamma \vdash \Delta$ が証明可能であるとすると、$\Gamma \vdash \Delta$ には証明図 $\pi$ が存在する。このとき、上の命題を証明図 $\pi$ の構成に関する帰納法により証明する。（照井さんのプリント参照。）